ΕΠΑ.Λ. Β' ΟΜΑΔΑΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1

Α. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν:

- η f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \eta$

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

Β. Πότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f;

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

Γ. Να δώσετε την γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος του Rolle.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

Δ. Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ).

1. Για κάθε μιγαδικό αριθμό z είναι $z + \overline{z} = 2Re(z)$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

2. Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = +\infty$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

3. Για οποιεσδήποτε συναρτήσεις $f: A \to \mathbb{R}$ και $g: B \to \mathbb{R}$, αν ορίζεται η συνάρτηση $\frac{f}{g}$, τότε έχει πεδίο ορισμού την τομή $A \cap B$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

4. Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

5. $\int_\alpha^\beta f(x)\cdot g'(x)dx = [f(x)\cdot g(x)]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f'(x)\cdot g(x)dx$, όπου f', g' είναι συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f\,(x) \;=\; 4x^3 \;+\; 12\lambda x^2 \;+\; (\lambda - 1)x\,, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

όπου $\lambda \in \mathbb{R}$, η οποία παρουσιάζει στο $x_0 = -1$ καμπή.

α. **i.** Να αποδείξετε ότι $\lambda = 1$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

ii. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

β. Να βρείτε το όριο

$$\lim_{x \to -3} \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

γ. **i.** Να βρείτε την αρχική της f της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $(0, 1)$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f και τον άξονα $x'x$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

ΘΕΜΑ 3

Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f\,(\eta\mu x) \;+\; f\,(\sigma\upsilon\nu x) \;=\; 1, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α. Να αποδείξετε ότι:

i. $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}$ και $f(0) + f(1) = 1$

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

ii. Υπάρχει $x_0 \in [0, 1]$ τέτοιο, ώστε: $f(x_0) \;+\; x_0 \;=\; 1$

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

β. Έστω, επιπλέον, ότι η f είναι παραγωγίσιμη και $f(x) \geq \sqrt{2}\,x - \frac{1}{2}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i. Να βρείτε την $f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ και να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της με τετμημένη $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

ii. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(1) - f(\sigma\upsilon\nu x)}{\eta\mu x}$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 8

ΘΕΜΑ 4

Α. Να αποδείξετε ότι $e^x - x \geq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Πότε ισχύει η ισότητα $e^x - x = 1$;

ΜΟΝΑΔΕΣ 3

Β. Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$. Για κάθε $x \geq 0$ θεωρούμε το μιγαδικό z, με:

$$z = \int_0^x e^{f(t)} dt + ix \int_0^1 e^{f(x-xt)} dt \quad \text{και} \quad \frac{|z|}{\sqrt{2}} = \int_0^x [f(t)+e^t] dt + f(\alpha) - 1,$$

όπου $\alpha > 0$.

Να αποδείξετε ότι:

α. **i.** $\frac{z}{1+i} = Re(z) = Im(z) \geq 0$, για κάθε $x \geq 0$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

ii. $e^{f(x)} = f(x) + e^x$, για κάθε $x \geq 0$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

β. Η f είναι γνησίως αύξουσα.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

γ. Η f έχει αντίστροφη και να βρείτε την αντίστροφή της.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

δ. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, +\infty)$, τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (0, \alpha)$ τέτοιο, ώστε $\alpha f'(\xi) = 1$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4