ΤΑΞΗ: Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ / ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Κυριακή 1 Απριλίου 2012

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 151.

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 14.

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ. 84 (Τα μέτρα θέσης μας δίνουν τη θέση του «κέντρου» των παρατηρήσεων στον οριζόντιο άξονα και τα μέτρα διασποράς την διασπορά των παρατηρήσεων, δηλαδή πόσο αυτές εκτείνονται γύρω από το «κέντρο» τους.

Α4. $\alpha \to \Lambda$, $\beta \to \Sigma$, $\gamma \to \Sigma$, $\delta \to \Lambda$, $\varepsilon \to \Lambda$.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Αφού το εμβαδόν του πολυγώνου συχνοτήτων είναι 250 θα είναι ν=250 όπου ν το πλήθος των συνταξιούχων του δείγματος.

Το πλάτος c κάθε μιας από τις 5 κλάσεις θα είναι $\frac{R}{5} = \frac{20}{5} = 4$.

Αφού το μέσο της δεύτερης κλάσης έχει τετμημένη 10 θα είναι $x_2=10$ και αν η πρώτη κλάση είναι [κ,κ+c) η δεύτερη θα είναι [κ+c, κ+2c) και θα είναι:

$$x_2 = \frac{\kappa + c + \kappa + 2c}{2} \Leftrightarrow 10 = \frac{\kappa + 4 + \kappa + 8}{2} \Leftrightarrow 2\kappa + 12 = 20 \Leftrightarrow \kappa = 4.$$

Αφού $f_2\% = a$ θα είναι σύμφωνα με τα δεδομένα

$$f_1\% = 3a,\quad f_3\% = \frac{a}{2},\quad f_4\% = \frac{3a}{10},\quad f_5\% = \frac{a}{5}.$$

Όμως $f_1\% + f_2\% + f_3\% + f_4\% + f_5\% = 100 \Leftrightarrow 3a + a + \frac{a}{2} + \frac{3a}{10} + \frac{a}{5} = 100 \Leftrightarrow a = 20.$

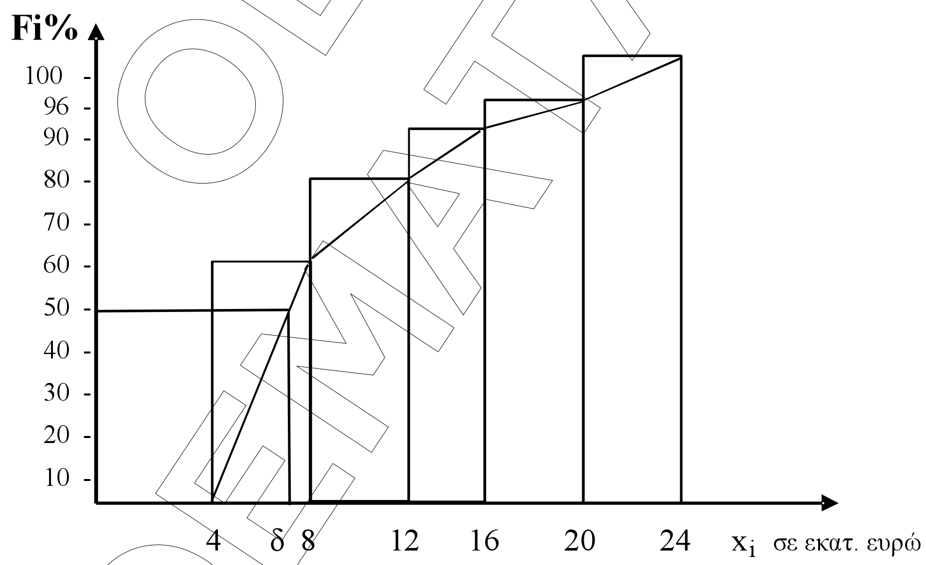
Άρα ο πίνακας συχνοτήτων γράφεται:

Κλάσεις	x_i	$f_i\%$	f_i	ν_i	N_i	$F_i\%$	F_i	$x_i \cdot \nu_i$
[4-8)	6	60	0,60	150	150	60	0,60	900
[8-12)	10	20	0,20	50	200	80	0,80	500
[12-16)	14	10	0,10	25	225	90	0,90	350
[16-20)	18	6	0,06	15	240	96	0,96	270
[20-24)	22	4	0,04	10	250	100	1	220
ΣΥΝΟΛΑ		100	1	250				2240

Για τις συχνότητες ν_i χρησιμοποιήσαμε τον τύπο $\nu_i = f_i \cdot \nu$.

Β2. Για τη μέση τιμή των συντάξεων έχουμε $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{5} x_i \cdot \nu_i}{\nu} = \dfrac{2240}{250} = 8,96$ εκατοντάδες ευρώ, δηλαδή 896 ευρώ.

Για την εύρεση της διαμέσου των συντάξεων σχηματίζουμε το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων $F_i\%$.



Από αυτό έχουμε $\dfrac{\delta - 4}{8 - 4} = \dfrac{50 - 0}{60 - 0} \Leftrightarrow \delta - 4 = \dfrac{4 \cdot 5}{6} \Leftrightarrow \delta \simeq 4 + 3,33 \simeq 7,33$.

Αφού $\bar{x} > \delta$ η κατανομή παρουσιάζει θετική ασυμμετρία.

Β3. Πάνω από 1300 ευρώ δηλαδή από 13 εκατοντάδες είναι τα $\frac{16-13}{16-12}$ της $3^{ης}$ κλάσης και όλοι που είναι στην $4^{η}$ και στην $5^{η}$ κλάση, δηλαδή ποσοστό $\left(\frac{3}{4}\cdot 10+6+4\right)\%=17,5\%$ δηλαδή $\frac{17,5}{100}\cdot 2850000=498750$ συνταξιούχοι.

Β4. Μέγιστο ετήσιο εισόδημα 8640 ευρώ σημαίνει ότι το μέγιστο μηνιαίο εισόδημα είναι $\frac{8640}{12}=720$ ευρώ, δηλαδή 7,2 εκατοντάδες ευρώ.

i. Από 4-7,2 εκατοντάδες ευρώ ανήκουν $\frac{7,2-4}{8-4}=\frac{3,2}{4}=0,80$=80% των συνταξιούχων της πρώτης κλάσης, δηλαδή ποσοστό $0,80\cdot 60=48\%$ του συνόλου των συνταξιούχων. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι 48%.

ii. Το ποσό που θα αφαιρεθεί από τις ανώτερες κλάσεις του δείγματος ανά μήνα είναι $100\cdot 25+200\cdot 15+400\cdot 10=2500+3000+4000=9500$ ευρώ και θα διανεμηθεί σε $\frac{80}{100}\cdot 150=120$ της $1^{ης}$ κλάσης. Άρα καθένας από τους δικαιούχους θα πάρει $\frac{9500}{120}=79,16$ ευρώ ανά μήνα.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για την f(x) πρέπει να ισχύουν: ($x\geq 0$ και $x-4\neq 0$). Άρα $A_f=[0,4)\cup(4,+\infty)$.
Για την g(x) πρέπει να ισχύουν: ($x>0$ και $x\geq 0$) δηλαδή x>0. Άρα $A_g=(0,+\infty)$.

Γ2. $\lim_{x\to 4} f(x)=\lim_{x\to 4}\frac{3\sqrt{x}-6}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{3\left(\sqrt{x}-2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{3}{\sqrt{x}+2}=\frac{3}{4}=\text{P(A)}$.

Είναι: $g'(x)=\frac{2\text{P(B)}}{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{16}2x=\frac{2\text{P(B)}}{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{x}{8}$

οπότε $g'(4)=\frac{2\text{P(B)}}{4}+\frac{1}{4}+\frac{4}{8}$.

Αν $\omega=\frac{\pi}{4}$ τότε

εφω=εφ$\frac{\pi}{4}=1=g'(4)\Leftrightarrow\frac{2P(B)}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=1\Leftrightarrow\frac{2P(B)}{4}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow P(B)=\frac{1}{2}$.

Γ3. **α** Αν $P(A\cap B)=\frac{2}{3}>\frac{1}{2}=P(B)$ άτοπο γιατί $(A\cap B)\subseteq B$.

Αν $P(A\cap B)=\frac{1}{6}$ τότε $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=$

$$=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{9}{12}+\frac{6}{12}-\frac{2}{12}=\frac{13}{12}>1 \text{ άτοπο.}$$

Άρα $P(A\cap B)=\frac{2}{5}$.

β $P(A\cup B')=P(A)+P(B')-P(A\cap B')=P(A)+1-P(B)-P(A-B)=$

$$=P(A)+1-P(B)-P(A)+P(A\cap B)=1-\frac{1}{2}+\frac{2}{5}=\frac{1}{2}+\frac{2}{5}=\frac{9}{10}.$$

γ. $P\left[(A-B)\cup(B-A)\right]=$

$=P(A-B)+P(B-A)=P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)=$

$=\frac{3}{4}-\frac{2}{5}+\frac{1}{2}-\frac{2}{5}=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}-\frac{4}{5}=\frac{15}{20}+\frac{10}{20}-\frac{16}{20}=\frac{9}{20}.$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. $f'(x)=-4x^3+4x=-4x\cdot(x^2-1)$

x	$-\infty$		**-1**		**0**		**1**		$+\infty$
-4x		+		+	0	−		−	
x^2-1		+	0	−		−	0	+	
f′(x)		+	0	−	0	+	0	−	
f(x)		↗		↘		↗		↘	

Άρα η $f\uparrow(-\infty,-1]$, $f\downarrow[-1,0]$, $f\uparrow[0,1]$, $f\downarrow[1,+\infty)$.

Έχει τοπικό μέγιστο για x_1=-1 το $f(-1)=2$ και για x_3=1 το $f(1)=2$ και τοπικό ελάχιστο για x_2=0 το f(0)=1.

Δ2. i) Είναι: $0 \le P(B) \le 1$ και $f \uparrow$ στο $[0,1]$.
Συνεπώς: $f(0) \le f\big(P(B)\big) \le f(1) \Leftrightarrow 1 \le P(A) \le 2$ και $0 \le P(A) \le 1$ και αφού ο δειγματικός χώρος αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα P(A)=1 και A=Ω.

Ακόμα:
$f\big(P(B)\big) = P(A) \Leftrightarrow -P^4(B) + 2P^2(B) + 1 = 1 \Leftrightarrow P^2(B)\cdot\big(2 - P^2(B)\big) = 0 \Leftrightarrow$
$P(B) = 0$ ή $P(B) = \pm\sqrt{2}$ απορ. αφού $0 \le P(B) \le 1$
Άρα P(B)=0 και $B = \varnothing$.

Δ2. ii. α)

- $\Gamma \ne A = \Omega$ και $\Gamma \ne B = \varnothing$
  Άρα:
  $0 < P(\Gamma) < 1 \Leftrightarrow 0 < 2P(\Gamma) < 2 \Leftrightarrow 0 < \nu_1 < 2$ και $\nu_1 \in \mathbb{N} \Rightarrow \nu_1 = 1$,
  οπότε $P(\Gamma) = \frac{1}{2}$
- $\Delta \ne \Omega, \varnothing$ και $\Gamma \subseteq \Delta$, $\Gamma \ne \Delta$
  Άρα:
  $P(\Gamma) < P(\Delta) < 1 \Leftrightarrow 4P(\Gamma) < 4P(\Delta) < 4 \Leftrightarrow 2 < \nu_2 < 4$ και $\nu_2 \in \mathbb{N} \Rightarrow \nu_2 = 3$,
  οπότε $P(\Delta) = \frac{3}{4}$.

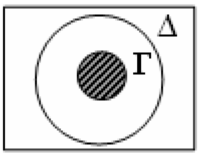
Συνεπώς:

x_i	ν_i
1	1
2	3
3	5
4	1
	ν=10

β) $\delta = \frac{t_5 + t_6}{2} = \frac{3+3}{2} = 3$.

γ) Είναι $\Gamma \cap \Delta = \Gamma$

οπότε $P(\Gamma \cap \Delta) = P(\Gamma) = \frac{1}{2}$



και $\Gamma \cup \Delta = \Delta$ οπότε $P(\Gamma \cup \Delta) = P(\Delta) = \frac{3}{4}$