ΤΑΞΗ: **3η ΤΑΞΗ ΕΠΑ.Λ. (Β΄ ΟΜΑΔΑ)**

ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ**

Ημερομηνία: Μ. Τρίτη 30 Απριλίου 2013

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ΄ ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.

Να αποδείξετε ότι, αν $f'(x)>0$ στο $(a,x_0)\cup(x_0,\beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β).

Μονάδες 9

Α2. **α.** Πότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f.

Μονάδες 3

β. Αν f, g συναρτήσεις με πεδίο ορισμού Α, Β αντιστοίχως, τι ονομάζουμε σύνθεση της f με την g και ποιο είναι το πεδίο ορισμού της;

Μονάδες 3

Α3. Να χαρακτηρίστε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο [α,β] τότε, ο τύπος της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες γράφεται

$$\int_a^\beta f(x)g'(x)dx - \int_a^\beta f'(x)g(x)dx = \left[f(x)g(x)\right]_a^\beta$$

β) Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z|^\nu = |z^\nu|,\ \ \nu\in\mathbb{N}^*$.

γ) Κάθε συνάρτηση $1\!-\!1$, είναι γνησίως μονότονη.

δ) Αν $0<a<1$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_a x = +\infty$.

ε) Για κάθε $\nu\in\mathbb{N}^*$ η συνάρτηση $f(x)=x^{-\nu}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με $f'(x) = -\nu x^{-\nu-1}$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z και w για τους οποίους ισχύουν οι επόμενες σχέσεις:

$$\bar{z}(z+2) = -|1-i|^2 \cdot z - 3 \qquad \text{και} \qquad w = 2z - i,$$

B1. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z. Ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του $\bar{z}$;

Μονάδες 7

B2. Να βρείτε την μέγιστη τιμή του $|z-\bar{z}|$ και τις τιμές του z για τις οποίες επιτυγχάνεται.

Μονάδες 6

B3. Αν για τους μιγαδικούς z των προηγούμενων ερωτημάτων ισχύει $|z-\bar{z}| = 2$ και $\text{Im}(z) > 0$, τότε να υπολογίσετε την τιμή του $\left(\dfrac{z-\bar{z}}{2}\right)^{2013}$.

Μονάδες 6

B4. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών w και να αποδείξετε ότι η απόσταση των εικόνων των z και w είναι ίση με την απόσταση της εικόνας του z από το σημείο Α(0,1).

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1}, & \text{αν } x \neq 0 \\ \ln a, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$.

Γ1. Βρείτε τον $a \in (0, +\infty)$ ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη και δείξτε ότι $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$.

Μονάδες 7

Έστω $a = e$.

Γ2. **α.** Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 6

β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της και τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης, εφόσον υπάρχουν.

Μονάδες 6

Γ3. Να αποδείξτε ότι η εξίσωση $2x - \int_0^x \dfrac{1}{f(t)+1}dt = \dfrac{1}{2013}$ έχει μοναδική ρίζα στο (0, 1).

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις f, G και F, οι οποίες είναι ορισμένες στο διάστημα $[0, +\infty)$ με f παραγωγίσιμη και G δύο φορές παραγωγίσιμη στο ίδιο διάστημα.

Έστω ότι ισχύουν: $f(0) = 1$, $G(0) = 0$ και για κάθε $x \geq 0$

$$\text{είναι } f'(x) > 0,\ G'(x) > 1 \text{ και } F(x) = \int_0^x f(t)\,dt .$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $F(x) \geq 0$ και $G(x) \geq x$ για κάθε $x \geq 0$.

Μονάδες 5

Δ2. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\left[F(x)\ln x\right]$ και να αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (0,\ 1)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi)\ln\xi + \dfrac{F(\xi)}{\xi} = 0$.

Μονάδες 7

Δ3. Δίνεται, επιπλέον, ότι

$$f'(x)\,F(x) + f^2(x) = G''(x)\left[G(x) - x\right] + \left[G'(x) - 1\right]^2, \text{ για κάθε } x \geq 0.$$

Να αποδείξετε ότι:

α. $F(x) = G(x) - x$, για κάθε $x \geq 0$.

Μονάδες 7

β. Για κάθε $x_0 > 0$, οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων C_F, C_G στα σημεία τους $B\left(x_0, F(x_0)\right)$ και $\Gamma\left(x_0, G(x_0)\right)$ αντιστοίχως, τέμνονται σε σημείο Α του άξονα $y'y$ **(μονάδες 3)** και το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισεμβαδικό με το χωρίο, που ορίζεται από τις C_F, C_G και την ευθεία $x = x_0$ **(μονάδες 3)**.

Μονάδες 6