ΤΑΞΗ: 3η ΤΑΞΗ ΕΠΑ.Λ. (Β΄ ΟΜΑΔΑ)

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ

Ημερομηνία: Κυριακή 27 Απριλίου 2014

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 224.

Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 280.

Α3. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 169.

Α4. **i.** Σωστό
ii. Σωστό
iii. Σωστό
iv. Λάθος
v. Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Είναι z_1 φανταστικός, εάν και μόνο αν $\mathrm{Re}(z_1)=0$ (1)

α) Φέρνουμε τον z_1 στην μορφή $\kappa+\lambda i$, $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$:

$$z_1=\frac{(1+\beta i-2i)\cdot(\alpha+2+i)}{(\alpha+2-i)\cdot(\alpha+2+i)}$$

$$=\frac{\alpha+2+i+\alpha\beta i+2\beta i-\beta-2\alpha i-4i+2}{(\alpha+2)^2+1}$$

$$=\frac{\alpha-\beta+4}{(\alpha+2)^2+1}+\frac{\alpha\beta+2\beta-2\alpha-3}{(\alpha+2)^2+1}i$$

Από την σχέση (1) προκύπτει $\frac{\alpha-\beta+4}{(\alpha+2)^2+1}=0\Leftrightarrow\alpha-\beta+4=0$.

Η τελευταία εξίσωση επαληθεύεται από όλα τα σημεία Μ (α, β) του μιγαδικού επιπέδου τα οποία είναι εικόνες του $z=\alpha+\beta i$ και μόνο αυτά. Άρα, ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι η ευθεία $x-y+4=0$.

β) Έστω $w=x+yi,\ x,\ y\in\mathbb{R}$.

Είναι $w-\frac{1}{2}i=x+(y-\frac{1}{2})i$

Επομένως, $\mathrm{Im}(w-\frac{1}{2}i)=y-\frac{1}{2}$

Έχουμε:

$$\left|(1-i)\,\mathrm{Im}\left(w-\frac{1}{2}i\right)\right|=\sqrt{2}\left|w+\frac{1}{2}i\right|\Leftrightarrow\left|(1-i)\left(y-\frac{1}{2}\right)\right|=\sqrt{2}\left|x+yi+\frac{1}{2}i\right|$$

$$\Leftrightarrow|1-i|\left|y-\frac{1}{2}\right|=\sqrt{2}\left|x+\left(y+\frac{1}{2}\right)i\right|$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{2}\left|y-\frac{1}{2}\right|=\sqrt{2}\sqrt{x^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow\left|y-\frac{1}{2}\right|^2=\left(\sqrt{x^2+y^2+y+\frac{1}{4}}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow y^2-y+\frac{1}{4}=x^2+y^2+y+\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow x^2+2y=0$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του w είναι η γραμμή με εξίσωση $x^2+2y=0$, η οποία είναι παραβολή, αφού $\Leftrightarrow x^2+2y=0\Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}x^2$

Β2. Το $|z-w|$ ισούται με την απόσταση των εικόνων των μιγαδικών z και w, επομένως εκφράζει την απόσταση των σημείων της ευθείας (ε): $x-y+4=0$ από τα σημεία της παραβολής C: $y=-\frac{1}{2}x^2$.

Έστω $M(x_0,y_0)$ τυχαίο σημείο της παραβολής, και Ν τυχαίο σημείο της ευθείας. Σύμφωνα με τα παραπάνω πρέπει και αρκεί να αποδείξουμε ότι $MN\geq\frac{7\sqrt{2}}{4}$. Θεωρούμε την προβολή M_0 του Μ στην ευθεία. Προφανώς $MN\geq MM_0$. Επειδή $y_0=-\frac{1}{2}x_0^2$ είναι $M\left(x_0,-\frac{1}{2}x_0^2\right)$ η απόσταση του Μ από την ευθεία (ε) είναι:

$$MM_0 = d(M, \varepsilon) = \frac{\left|x_0 + \frac{1}{2}x_0^2 + 4\right|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{\left|x_0^2 + 2x_0 + 8\right|}{2\sqrt{2}} \quad (1)$$

επομένως

$$MM_0 = \frac{\left|(x_0+1)^2 + 7\right|}{2\sqrt{2}} = \frac{(x_0+1)^2 + 7}{2\sqrt{2}} \geq \frac{7}{2\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{4}$$

Συνεπώς $MN \geq MM_0 \geq \frac{7\sqrt{2}}{4}$, που αποδεικνύει το ζητούμενο.

2ος τρόπος εύρεσης του ελαχίστου από την (1).

Έστω $f(x) = x^2 + 2x + 8,\ A_f = \mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με $f'(x) = 2x + 2, x \in \mathbb{R}$. Έχουμε

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > -1,\ f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < -1$$

Άρα για $x = -1$, η f έχει ελάχιστο το $f(-1) = 7$, οπότε $x_0^2 + 2x_0 + 8 \geq 7$ και από την (1)

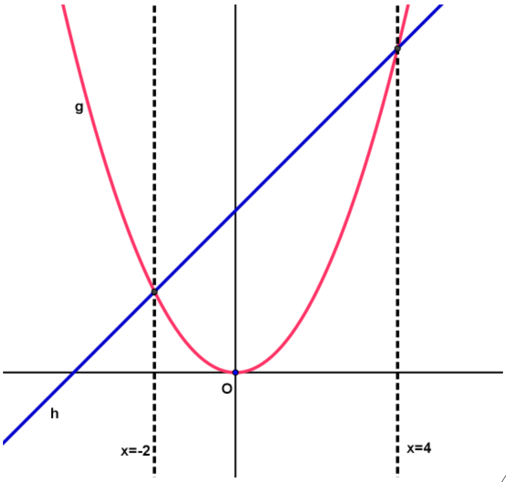
$$MM_0 = d(M, \varepsilon) \geq \frac{7}{2\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{4}$$

Β3. **α)** Οι εικόνες δύο συζυγών μιγαδικών είναι σημεία συμμετρικά, ως προς τον άξονα x΄x. Εφόσον οι εικόνες του w είναι τα σημεία $\left(x, -\frac{1}{2}x^2\right)$, $x \in \mathbb{R}$, οι εικόνες του $\bar{w}$, είναι τα $\left(x, \frac{1}{2}x^2\right)$, $x \in \mathbb{R}$, που έχουν γεωμετρικό τόπο την παραβολή C: $y = \frac{1}{2}x^2$, αφού αυτά και μόνο αυτά την επαληθεύουν.

β) Έστω $g(x) = \frac{1}{2}x^2$ και $h(x) = x + 4$. Αρχικά βρίσκουμε τις ρίζες και το πρόσημο της διαφοράς $g(x) - h(x)$. Είναι

$$g(x) - h(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - x - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \text{ ή } x = -2$$

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
$g(x) - h(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	



Το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E=\int_{-2}^{4}|g(x)-h(x)|\,dx=\int_{-2}^{4}[h(x)-g(x)]dx$$

$$=\int_{-2}^{4}\left(x+4-\frac{1}{2}x^2\right)dx$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}+4x-\frac{x^3}{6}\right]_{-2}^{4}=18\text{τμ.}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Είναι

$$f'(x)-f(x)=e^xg'(x)-1 \Leftrightarrow e^{-x}f'(x)-e^{-x}f(x)=e^{-x}e^xg'(x)-e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow e^{-x}f'(x)-e^{-x}f(x)=g'(x)-e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow \left[f(x)e^{-x}\right]'=\left[g(x)+e^{-x}\right]'$$

$$\Leftrightarrow f(x)e^{-x}=g(x)+e^{-x}+c,\quad (1) \text{ με } c\in\mathbb{R}$$

Αν στη σχέση (1) θέσουμε όπου $x=1$, έχουμε

$$f(1)e^{-1}=g(1)+e^{-1}+c \Leftrightarrow e^{-1}=e^{-1}+c \Leftrightarrow c=0$$

Επομένως η (1) δίνει $f(x)=e^xg(x)+1,\ x\in\mathbb{R}$.

Γ2. **α)** Από την σχέση $f'(x)-f(x)=e^xg'(x)-1$, για $x=1$ έχουμε

$$f'(1)-f(1)=eg'(1)-1 \Leftrightarrow f'(1)=eg'(1),\ (2)$$

Ακόμα

$$2f(x)+x^2-2x\ge 1 \Leftrightarrow 2f(x)+x^2-2x-1\ge 0\ (3) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Αν θεωρήσουμε $2f(x)+x^2-2x-1=\varphi(x)$, τότε επειδή

$$2f(1)+1-2-1=\varphi(1)\Leftrightarrow \varphi(1)=0,$$

η (3) γράφεται $\varphi(x)\ge\varphi(1)$. Συνεπώς η φ(x) παρουσιάζει για $x=1$ (ολικό) ελάχιστο. Ακόμη η φ(x) είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:

$$\varphi'(x)=2f'(x)+\left(x^2-2x-1\right)' \Leftrightarrow \varphi'(x)=2f'(x)+2x-2.$$

Για την φ(x) ισχύουν οι υποθέσεις του Θ. Fermat, άρα $\varphi'(1)=0$, ή ισοδύναμα

$$2f'(1)+2-2=0 \Leftrightarrow f'(1)=0$$

Επομένως από την (2) έχουμε: $eg'(1)=0 \Leftrightarrow g'(1)=0$.

β) Έστω $x>0$. Θέτουμε $\frac{x+2}{x+1}=t$, οπότε

$$\frac{x+1}{x+1}+\frac{1}{x+1}=t \Leftrightarrow \frac{1}{x+1}=t-1 \Leftrightarrow x+1=\frac{1}{t-1}$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+2}{x+1}=1$, το t τείνει στο 1. Έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty}\left[(x+1)g\left(\frac{x+2}{x+1}\right)\right]=\lim_{t\to1}\left[\frac{1}{t-1}g(t)\right]=\lim_{t\to1}\left[\frac{g(t)-g(1)}{t-1}\right]=g'(1)=0$$

Γ3. α) Είναι $f(x)=e^x g(x)+1$ και $g(x)=(x-1)^2$, $x\in\mathbb{R}$, οπότε:

$$f(x)=e^x(x-1)^2+1,\ x\in\mathbb{R}.$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x)=\left[e^x(x-1)^2+1\right]'=e^x(x-1)^2+2e^x(x-1)=e^x(x-1)(x+1)$$

Ο πίνακας με τις ρίζες και το πρόσημο της $f'(x)$, τη μονοτονία και τα ακρότατα της f είναι:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f ΄(x)		+	0	−	0	+	
f (x)		↗	$\frac{4}{e}+1$	↘	1	↗	

Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty,-1]$, $[-1,1]$, $[1,+\infty)$ και $f'(x)>0$ για $x<-1$, $f'(x)<0$ για $-1<x<1$, $f'(x)>0$ για $x>1$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,-1]$, γνησίως φθίνουσα στο $[-1,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

Έχουμε

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[e^x(x-1)^2+1\right]=0+1=1,$$

αφού

$$\lim_{x\to-\infty}\left[e^{x}(x-1)^{2}\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x-1)^{2}}{e^{-x}}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to-\infty}\frac{\left[(x-1)^{2}\right]'}{\left(e^{-x}\right)'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2(x-1)}{-e^{-x}}$$

$$\overset{\frac{-\infty}{-\infty}}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to-\infty}\frac{2(x-1)'}{-\left(e^{-x}\right)'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}2e^{x}=0$$

Ακόμη

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[e^{x}(x-1)^{2}+1\right]=+\infty,$$

αφού

$$\lim_{x\to+\infty}(x-1)^{2}=+\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty}e^{x}=+\infty.$$

Επομένως η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x=-1$ το $f(-1)=\frac{4}{e}+1$ και ολικό ελάχιστο για $x=1$ το $f(1)=1$. Αν

$$A_{1}=(-\infty,-1),\quad A_{2}=[-1,1] \text{ και } A_{3}=(1,+\infty),$$

τότε

$$f(A_{1})=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),\frac{4}{e}+1\right)=\left(1,\frac{4}{e}+1\right),$$

$$f(A_{2})=\left[f(1),f(-1)\right]=\left[1,\frac{4}{e}+1\right] \text{ και}$$

$$f(A_{3})=\left(1,\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=(1,+\infty).$$

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι το

$$f(\mathbb{R})=f(A_{1})\cup f(A_{2})\cup f(A_{3})=[1,+\infty)$$

β) Η $h(x)=e^{x}(1-x)+1,\ x\in\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$h'(x)=\left[e^{x}(1-x)+1\right]'=e^{x}(1-x)-e^{x}=-xe^{x},\ x\in\mathbb{R}$$

Έστω ε η εφαπτομένη που φέρουμε στη C_h από το σημείο $M(1,\lambda)$ και $(x_0,h(x_0))$ το σημείο επαφής. Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι

$$y-h(x_0)=h'(x_0)(x-x_0),$$

η οποία γράφεται

$$y-e^{x_0}(1-x_0)-1=-x_0e^{x_0}(x-x_0)$$

Επειδή το $M(1,\lambda)$ είναι σημείο της εφαπτομένης, για $x=1$ και $y=\lambda$ η τελευταία σχέση δίνει

$$\lambda - e^{x_0}(1-x_0) - 1 = -x_0 e^{x_0}(1-x_0) \Leftrightarrow \lambda = 1 + e^{x_0}\left(1-x_0-x_0+x_0{}^2\right)$$
$$\Leftrightarrow e^{x_0}(x_0-1)^2 + 1 = \lambda$$
$$\Leftrightarrow f(x_0) = \lambda$$

Όπως δείξαμε στο προηγούμενο ερώτημα, η f είναι γνησίως μονότονη σε καθένα από τα διαστήματα A_1, A_2, A_3, οπότε η εξίσωση $f(x) = \lambda$, έχει το πολύ μία λύση σε καθένα από αυτά και, συνεπώς, συνολικά έχει το πολύ τρεις λύσεις στο $\mathbb{R}$. Αυτό αποδεικνύει, ότι από το σημείο $M(1, \lambda)$ άγονται το πολύ τρεις εφαπτόμενες στη C_h.

2ος τρόπος απόδειξης, ότι η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει το πολύ τρεις ρίζες. Υποθέτουμε ότι έχει τέσσερις διαφορετικές ρίζες τις $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ και έστω χωρίς βλάβη της γενικότητας $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3 < \rho_4$. Αυτές είναι ρίζες και της συνάρτησης

$$\varphi(x) = f(x) - \lambda$$

Η φ είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $[\rho_1, \rho_2]$, $[\rho_2, \rho_3]$, $[\rho_3, \rho_4]$ και παραγωγίσιμη σε καθένα από τα $(\rho_1, \rho_2), (\rho_2, \rho_3), (\rho_3, \rho_4)$ με $\varphi'(x) = f'(x)$ και ακόμα

$$\varphi(\rho_1) = \varphi(\rho_2) = \varphi(\rho_3) = \varphi(\rho_4) = 0$$

Άρα εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle σε καθένα από τα διαστήματα $(\rho_1, \rho_2), (\rho_2, \rho_3), (\rho_3, \rho_4)$, όποτε υπάρχουν $\kappa_1 \in (\rho_1, \rho_2)$, $\kappa_2 \in (\rho_2, \rho_3)$, $\kappa_3 \in (\rho_3, \rho_4)$ τέτοια, ώστε

$$\varphi'(\kappa_1) = \varphi'(\kappa_2) = \varphi'(\kappa_3) = 0$$

Προφανώς $\kappa_1 < \kappa_2 < \kappa_3$. Επειδή $\varphi'(x) = f'(x)$ προκύπτει ότι η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει τρεις διαφορετικές ρίζες, τις $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$, που είναι άτοπο, διότι, όπως αποδείχτηκε στο προηγούμενο ερώτημα, έχει δύο ακριβώς δύο ρίζες τις $x = 1, x = -1$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θεωρούμε την συνάρτηση $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$h(x) = \int_0^x 2t^2 e^{t^2} dt - xe^{x^2} + x$$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$$h'(x)=2x^2e^{x^2}-\left(e^{x^2}+2x^2e^{x^2}\right)+1=1-e^{x^2}$$

Η h΄ μηδενίζεται για x = 0 και για κάθε x ≠ 0 είναι

$$x^2>0\Leftrightarrow e^{x^2}>1\Leftrightarrow 1-e^{x^2}<0\Leftrightarrow h'(x)<0$$

Επομένως, η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε έχουμε:

$$h(x)<0\Leftrightarrow h(x)<h(0)\Leftrightarrow x>0 \quad (1)$$

Η πρώτη από τις δοσμένες ανισότητες για κάθε $x\in\mathbb{R}$ δίνει:

$$\int_0^{g''(x)}2t^2e^{t^2}dt-g''(x)e^{[g''(x)]^2}+g''(x)<0$$

ή $h(g''(x))<0$ και λόγω της (1): $g''(x)>0$, που σημαίνει ότι η g' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

2ος τρόπος

Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες έχουμε:

$$\int_0^{g''(x)}2t^2e^{t^2}dt<g''(x)e^{[g''(x)]^2}-g''(x)$$

$$\Leftrightarrow\int_0^{g''(x)}t\left(e^{t^2}\right)'dt<g''(x)e^{[g''(x)]^2}-g''(x)$$

$$\Leftrightarrow\left[te^{t^2}\right]_0^{g''(x)}-\int_0^{g''(x)}e^{t^2}dt<g''(x)e^{[g''(x)]^2}-g''(x)$$

$$\Leftrightarrow g''(x)e^{[g''(x)]^2}-\int_0^{g''(x)}e^{t^2}dt<g''(x)e^{[g''(x)]^2}-g''(x)$$

$$\Leftrightarrow\int_0^{g''(x)}e^{t^2}dt>g''(x) \quad (1^*)$$

Και τώρα συνεχίζουμε ως εξής:

$$(1^*)\Leftrightarrow\int_0^{g''(x)}e^{t^2}dt>\int_0^{g''(x)}dt$$

$$\Leftrightarrow\int_0^{g''(x)}e^{t^2}dt-\int_0^{g''(x)}dt>0$$

$$\Leftrightarrow\int_0^{g''(x)}\left(e^{t^2}-1\right)dt>0 \quad (2^*)$$

Επειδή $e^{t^2}-1\geq 0$, για κάθε $t\in\mathbb{R}$, η (2*) αποκλείει $g''(x)\leq 0$, αφού τότε θα είχαμε $\int_{g''(x)}^{0}\left(e^{t^2}-1\right)dt\geq 0\Leftrightarrow\int_0^{g''(x)}\left(e^{t^2}-1\right)dt\leq 0$, άτοπο. Επομένως $g''(x)>0$, που σημαίνει ότι η g' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Δ2. Θεωρούμε την συνάρτηση *f* με

$$f(x)=\int_{-2}^{g(x)}e^{t^2}dt,\quad x\in[0,1]$$

Η f είναι συνεχής, ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων g και g_1 με $g_1(x)=\int_{-2}^{x} e^{t^2}dt$. Ακόμα

$$f(0)f(1)=\int_{-2}^{g(0)} e^{t^2}dt \int_{-2}^{g(1)} e^{t^2}dt<0$$

Επομένως, από το Θεώρημα του Bolzano υπάρχει $\rho\in(0,\ 1)$ τέτοιο ώστε $f(\rho)=0$ ή

$$\int_{-2}^{g(\rho)} e^{t^2}dt=0 \quad (2)$$

- Αν $g(\rho)>-2$, επειδή $e^{t^2}>0$ θα είναι $\int_{-2}^{g(\rho)} e^{t^2}dt>0$ άτοπο από την (2).
- Αν $g(\rho)<-2$ επειδή $e^{t^2}>0$ θα είναι $\int_{g(\rho)}^{-2} e^{t^2}dt>0 \Leftrightarrow \int_{-2}^{g(\rho)} e^{t^2}dt<0$, ομοίως άτοπο από την (2).

Επομένως $g(\rho)=-2$.
Στη συνέχεια, εφαρμόζεται το Θεώρημα του Rolle για την g στο διάστημα $[\rho,\ 2]$, αφού ως παραγωγίσιμη είναι συνεχής στο $[\rho,\ 2]$, παραγωγίσιμη στο $(\rho,\ 2)$ και ακόμα $g(\rho)=g(2)=-2$. Επομένως, υπάρχει $x_0\in(\rho,2)$ τέτοιο, ώστε

$$g'(x_0)=0 \quad (3)$$

Αλλά η g' είναι γνησίως αύξουσα οπότε:

$$\rho<x_0<2\Rightarrow g'(\rho)<g'(x_0)<g'(2)\Rightarrow g'(\rho)<0<g'(2)$$

που αποδεικνύει το ζητούμενο.

Δ3. Έστω $x_0<x<2$. Θέτουμε

$$u=\frac{x-3}{g(x)+2}$$

Είναι $\lim\limits_{x\to 2^-} u=\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{x-3}{g(x)+2}=+\infty$ διότι:

- $\lim\limits_{x\to 2^-}(x-3)=-1<0$
- $\lim\limits_{x\to 2^-}\left[g(x)+2\right]=0$
- $g(x)+2<0$, γιατί από την μονοτονία της g' είναι

$$x>x_0\Rightarrow g'(x)>g'(x_0)\Rightarrow g'(x)>0,$$

που σημαίνει ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0,+\infty)$. Έτσι

$$x_0<x<2\Rightarrow g(x)<g(2)\Rightarrow g(x)<-2\Rightarrow g(x)+2<0$$

Στη συνέχεια το ζητούμενο όριο γίνεται

$$\lim_{x\to 2^-} g\left(\frac{x-3}{g(x)+2}\right)=\lim_{u\to+\infty} g(u)$$

Η εφαπτομένη της C_g στο σημείο της M(2, g(2)) έχει εξίσωση:

$$y-g(2)=g'(2)(x-2)\Leftrightarrow y=g'(2)x-2g'(2)+g(2)$$

Επειδή η g΄ είναι γνησίως αύξουσα η g είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, οπότε τα σημεία της C_g είναι πάνω από τα αντίστοιχα σημεία της εφαπτομένης της, εκτός του σημείου επαφής, επομένως για κάθε $x\in\mathbb{R}$

$$g(x)\geq g'(2)x-2g'(2)+g(2)\quad (4)$$

Επειδή $g'(2)>0$ είναι

$$\lim_{x\to+\infty}\left[g'(2)x-2g'(2)+g(2)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[g'(2)x\right]=+\infty$$

Αν $h(x)=g'(2)x-2g'(2)+g(2)$, με $x\in\mathbb{R}$ αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=+\infty$ θα υπάρχει $\alpha>0$, ώστε στο $(\alpha,+\infty)$ είναι $h(x)>0$ οπότε από (4) είναι

$$g(x)\geq h(x)>0\Leftrightarrow 0<\frac{1}{g(x)}\leq\frac{1}{h(x)}$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{h(x)}=0$, από κριτήριο παρεμβολής θα είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{g(x)}=0$.

Αν $\varphi(x)=\frac{1}{g(x)}\Leftrightarrow g(x)=\frac{1}{\varphi(x)}$, τότε

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\varphi(x)}=+\infty\Rightarrow\lim_{u\to+\infty}g(u)=+\infty,$$

διότι είναι $\varphi(x)>0$ στο $(\alpha,+\infty)$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$.

Ώστε

$$\lim_{x\to2^-}g\left(\frac{x-3}{g(x)+2}\right)=\lim_{u\to+\infty}g(u)=+\infty$$

Δ4. Η εξίσωση έχει προφανή ρίζα την x = 1. Θα αποδείξουμε ότι είναι μοναδική. Πραγματικά είναι:

$$g(1+x-x^3)=g(1)+g(x)-g(x^3)\Leftrightarrow g(1+x-x^3)-g(1)=g(x)-g(x^3)\quad(5)$$

- Αν υποθέσουμε ότι x > 1, τότε θεωρούμε τα διαστήματα $[1+x-x^3,\ 1]$ και $[x,\ x^3]$. Αυτά είναι καλώς ορισμένα και ξένα μεταξύ τους, αφού ισχύουν $1<x<x^3$ και $1+x-x^3<1\Leftrightarrow x<x^3$, δηλαδή
$$1+x-x^3<1<x<x^3.$$

Εφαρμόζεται, τώρα, για την g το θεώρημα μέσης τιμής σε καθένα από τα $[1+x-x^3,\ 1]$ και $[x,\ x^3]$, γιατί η g είναι συνεχής σ' αυτά και παραγωγίσιμη στα αντίστοιχα ανοιχτά διαστήματα. Υπάρχουν, επομένως, ξ_1, ξ_2 με

$$1+x-x^3<\xi_1<1<x<\xi_2<x^3, \qquad (6)$$

τέτοια ώστε

$$\frac{g(1)-g(1+x-x^3)}{x^3-x}=g'(\xi_1) \quad \text{και} \quad \frac{g(x^3)-g(x)}{x^3-x}=g'(\xi_2)$$

Λόγω της (5):

$$-g'(\xi_1)=-g'(\xi_2)\Rightarrow g'(\xi_1)=g'(\xi_2)$$

Άτοπο, γιατί από την (6) και την μονοτονία της g΄ είναι
$\xi_1<\xi_2\Rightarrow g'(\xi_1)<g'(\xi_2)$

- Πάλι, αν υποθέσουμε ότι $0 < x < 1$, τότε εργαζόμαστε στα διαστήματα $[1,\ 1+x-x^3]$ και $[x^3,\ x]$. Αυτά είναι καλώς ορισμένα και ξένα μεταξύ τους, αφού ισχύουν $x^3<x<1$ και $1<1+x-x^3 \Leftrightarrow x^3<x$, δηλαδή

$$x^3<x<1<1+x-x^3$$

Εφαρμόζεται, ομοίως, για την g το θεώρημα μέσης τιμής σε καθένα από τα $[1,\ 1+x-x^3]$ και $[x^3,\ x]$, γιατί η g είναι συνεχής σ' αυτά και παραγωγίσιμη στα αντίστοιχα ανοιχτά διαστήματα. Υπάρχουν, επομένως, ξ_1, ξ_2 με

$$x^3<\xi_2<x<1<\xi_1<1+x-x^3, \qquad (7)$$

τέτοια ώστε

$$\frac{g(1+x-x^3)-g(1)}{x-x^3}=g'(\xi_1) \quad \text{και} \quad \frac{g(x)-g(x^3)}{x-x^3}=g'(\xi_2)$$

Λόγω της (5):

$$g'(\xi_1)=g'(\xi_2)$$

Άτοπο, γιατί από την (7) και την μονοτονία της g΄ είναι
$\xi_2<\xi_1\Rightarrow g'(\xi_2)<g'(\xi_1)$.
Ώστε η εξίσωση έχει μοναδική λύση την προφανή x = 1.