ΤΑΞΗ: **3η ΤΑΞΗ ΕΠΑ.Λ. (Β΄ ΟΜΑΔΑ)**

ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ / ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**

Ημερομηνία: Μ. Τετάρτη 8 Απριλίου 2015
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω $x_1, x_2, \dots, x_k$ οι τιμές μιας μεταβλητής X που αναφέρονται στα άτομα ενός δείγματος μεγέθους ν, όπου κ, ν, μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί με $\kappa \le \nu$. Να αποδείξετε ότι:

α. $0 \le f_i \le 1$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, \kappa$

β. $f_1 + f_2 + \dots + f_\kappa = 1$

Μονάδες 8

Α2. Τί ονομάζεται στατιστική ομαλότητα ή νόμος των μεγάλων αριθμών;

Μονάδες 4

Α3. Τί εκφράζει η αθροιστική σχετική συχνότητα F_i της τιμής x_i μιας ποσοτικής μεταβλητής X;

Μονάδες 3

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν για μια συνάρτηση f ορισμένη στο A ισχύει $f(x) \ge f(x_0)$ για κάθε $x \in A$, τότε η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 \in A$.

β. Η παράγωγος μιας συνάρτησης f σε ένα x_0 του πεδίου ορισμού της εκφράζει τον ρυθμό μεταβολής του x ως προς $y = f(x)$ όταν $x = x_0$.

γ. Το εύρος είναι ένα μέτρο διασποράς που βασίζεται μόνο στις δύο ακραίες παρατηρήσεις.

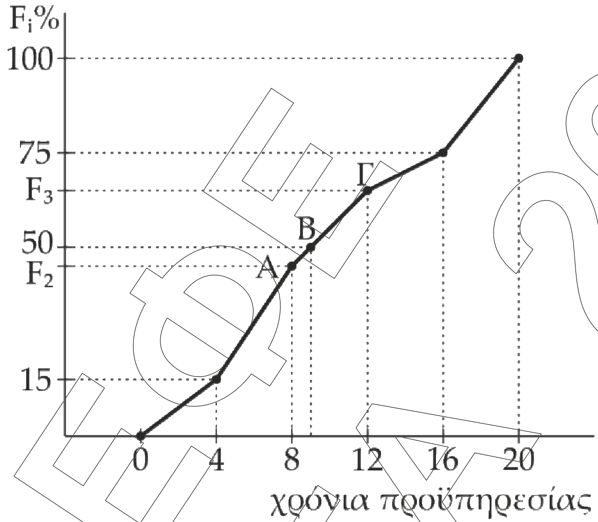
δ. Δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα είναι συμπληρωματικά.

ε. Αν για δύο ενδεχόμενα Α, Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει $P(A) \le P(B)$, τότε $A \subseteq B$.

Μονάδες 5x2

ΘΕΜΑ Β

Τα χρόνια προϋπηρεσίας των υπαλλήλων μιας εταιρείας έχουν ομαδοποιηθεί σε 5 κλάσεις ίσου πλάτους (θεωρούμε ότι οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες).Στο παρακάτω σχήμα δίνεται το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό, που αντιστοιχεί στα χρόνια προϋπηρεσίας των υπαλλήλων.



Για τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΑΓ ισχύει ότι

$$\frac{AB}{A\Gamma}=\frac{1}{4}$$

Β1. Να αποδείξετε ότι η διάμεσος του παραπάνω δείγματος είναι ίση με 9. (Μονάδες 3) Στη συνέχεια, αν γνωρίζουμε ότι η σχετική συχνότητα της δεύτερης κλάσης είναι τριπλάσια από την σχετική συχνότητα της τέταρτης κλάσης να κατασκευάσετε τον πίνακα σχετικής συχνότητας f_i και αθροιστικής συχνότητας F_i. (Μονάδες 4)

Μονάδες 7

Β2. Αν $f_2 = 0{,}3$ και $f_4 = 0{,}1$ να βρείτε την μέση τιμή και την διακύμανση του δείγματος.

Μονάδες 6

Β3. Αν επιπλέον, ισχύει ότι

$$\sum_{i=1}^{5} x_i^2 v_i = 5280$$

Να βρείτε πόσοι υπάλληλοι έχουν τουλάχιστον 5 χρόνια προϋπηρεσίας.

Μονάδες 7

Β4. Η εταιρεία αποφάσισε να δώσει ένα εφάπαξ επίδομα y_i (ευρώ) σε κάθε υπάλληλο το οποίο εξαρτάται από τα χρόνια προϋπηρεσίας του και δίνεται από την σχέση

$$y_i = 3x_i + 2i,\ i = 1,2,3,4,5$$

Να βρείτε πόσο θα στοιχίσει στην εταιρεία η απόφαση αυτή.

Μονάδες 5

Δίνεται ότι,

$$s^2 = \frac{1}{v}\left\{\sum_{i=1}^{k} x_i^2 v_i - \frac{1}{v}\left(\sum_{i=1}^{k} x_i v_i\right)^2\right\}$$

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται ο δειγματικός χώρος Ω ενός πειράματος τύχης, ο οποίος αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Αν Α, Β ενδεχόμενα του Ω με $A \neq \varnothing$, και συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = x^2 - \left[P(A') + P(B')\right]x,$$

όπου A', B' τα συμπληρωματικά των Α και Β.

Γ1. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη ε της f στο σημείο της $M(1, f(1))$ έχει εξίσωση: $\varepsilon : y = \left[P(A) + P(B)\right]x - 1$

Μονάδες 3

Αν η ε σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδό $E = \dfrac{1}{2P(A \cup B)}$ τ.μ.

Γ2. Να δείξετε ότι τα Α, Β είναι ασυμβίβαστα.

Μονάδες 6

Γ3. Αν για το δείγμα $x_1, x_2, \ldots, x_7$, με

$$x_1 = P(\varnothing),\ x_2 = P(A \cup B),\ x_3 = P(A \cap B),\ x_4 = P(B - A),$$
$$x_5 = P(A - B),\ x_6 = P(\Omega),\ x_7 = P(B)$$

ισχύει ότι $\delta = \dfrac{1}{3}$ και $\bar{x} = \dfrac{8}{21}$, τότε να δείξετε ότι $P(A) = \dfrac{1}{3}$, $P(B) = \dfrac{1}{3}$ και $P(A \cup B) = \dfrac{2}{3}$.

Μονάδες 7

Γ4. Έστω Γ ένα ενδεχόμενο του ίδιου δειγματικού χώρου Ω. Στο δείγμα $x_1, x_2, \dots, x_7$ του ερωτήματος **Γ.3.** προσθέτουμε μια παρατήρηση $x_8 = P(\Gamma) + \frac{1}{2}$. Αν το νέο δείγμα έχει μέση τιμή $\bar{x}' = \frac{1}{2}$, να αποδείξετε ότι:

i. τα Α και Γ δεν είναι ασυμβίβαστα,

Μονάδες 4

ii. $\frac{1}{6} \le P(A \cap \Gamma) \le \frac{1}{3}$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x\ln x - (x+1)\ln(x+1)$, $x > 0$ ένα δείγμα ν παρατηρήσεων t_i, i = 1, 2, …,ν οι οποίες έχουν μέση τιμή $\bar{x} > 0$, τυπική απόκλιση s, συντελεστή μεταβολής CV και ισχύει $\sum_{i=1}^{\nu} t_i^2 = (\bar{x}^2 - \bar{x} + 11)\cdot\nu$. Έστω επίσης ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{0,1,2,\dots,9\}$ ενός πειράματος τύχης, για τα στοιχειώδη ενδεχόμενα του οποίου γνωρίζουμε ότι: $P(\kappa) = f''(\kappa)$, $\kappa = 1,2,\dots,9$ και $P(0) = CV$.

Δ1. Να δείξετε ότι CV = 10%.

Μονάδες 6

Δ2. Να δείξετε ότι $\bar{x} = 10$, $s = 1$.

Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε το ποσοστό μεταβολής του συντελεστή CV , αν η τιμή καθεμίας από τις παρατηρήσεις t_i, i = 1, 2, …,ν, ελαττωθεί κατά 2 μονάδες.

Μονάδες 5

Δίνεται επιπλέον ότι ν = 16.

Δ4. Να δείξετε ότι $6 \le t_i \le 14$, $i = 1,2,\dots,16$ (Μονάδες 4) και να ελέγξετε αν μπορεί να υπάρχει παρατήρηση του δείγματος την οποία θα αφαιρέσουμε από το δείγμα και η μέση τιμή των υπόλοιπων 15 παρατηρήσεων να είναι $\bar{x}_1 = 9$ (Μονάδες 4)

Μονάδες 8

Δίνεται ότι,

$$s^2 = \frac{1}{\nu}\left\{\sum_{i=1}^{\nu} t_i^2 - \frac{1}{\nu}\left(\sum_{i=1}^{\nu} t_i\right)^2\right\}$$