ΤΑΞΗ: 3η ΤΑΞΗ ΕΠΑ.Λ. (Β΄ ΟΜΑΔΑ)

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ / ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Μ. Τετάρτη 8 Απριλίου 2015
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό σελ. 65

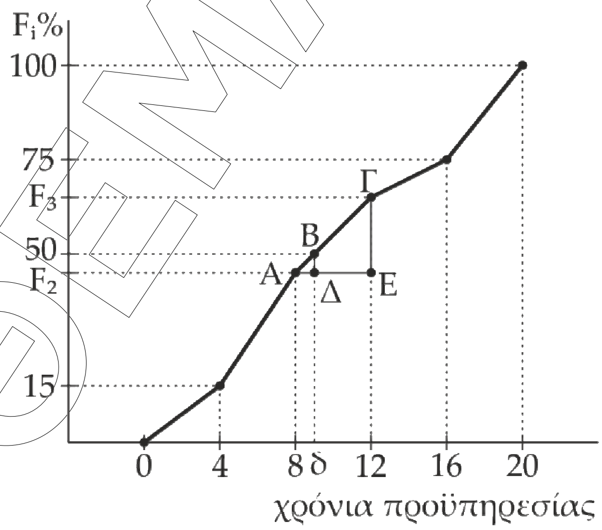
Α2. Σχολικό σελ. 148

Α3. Σχολικό σελ. 66

Α4. **α.** Λάθος
β. Λάθος
γ. Σωστό
δ. Λάθος
ε. Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Σύμφωνα με το σχήμα



τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι όμοια γιατί είναι ορθογώνια και έχουν την γωνία $\hat{A}$ κοινή. Επομένως, οι πλευρές τους είναι ανάλογες. Δηλαδή,

$$\frac{AB}{A\Gamma}=\frac{A\Delta}{AE}=\frac{B\Delta}{\Gamma E}$$

Επομένως,

$$\frac{AB}{A\Gamma}=\frac{A\Delta}{AE}\Leftrightarrow\frac{1}{4}=\frac{\delta-8}{12-8}\Leftrightarrow\frac{1}{4}=\frac{\delta-8}{4}\Leftrightarrow\delta-8=1\Leftrightarrow\delta=9$$

<u>1ος τρόπος:</u>

Από το παραπάνω πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επι τοις εκατό έχουμε ότι:

$$f_1\%=15$$
$$f_2\%=F_2\%-15$$
$$f_3\%=F_3\%-F_2\%$$
$$f_4\%=75-F_3\%$$
$$f_5\%=100-75=25$$

Όμως,

$$f_2\%=3f_4\%\Leftrightarrow F_2\%-15=3(75-F_3\%)$$
$$\Leftrightarrow F_2\%-15=225-3F_3\%$$
$$\Leftrightarrow F_2\%=240-3F_3\%\ (1)$$

Επίσης, ισχύει

$$\frac{AB}{A\Gamma}=\frac{B\Delta}{\Gamma E}\Leftrightarrow\frac{1}{4}=\frac{50-F_2\%}{F_3\%-F_2\%}\Leftrightarrow$$

$$F_3\%-F_2\%=200-4F_2\%\overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$
$$F_3\%-240+3F_3\%=200-4(240-3F_3\%)\Leftrightarrow$$
$$4F_3\%-240=200-960+12F_3\%\Leftrightarrow$$
$$-8F_3\%=440-960\Leftrightarrow$$
$$-8F_3\%=-520\Leftrightarrow F_3\%=65$$

Οπότε, από την σχέση (1) έχουμε ότι,

$$F_2\%=240-3\cdot 65=240-195\Leftrightarrow F_2\%=45$$

Άρα, οι σχετικές συχνότητες επί τοις εκατό είναι:

$$f_1\%=15$$
$$f_2\%=30$$
$$f_3\%=20$$
$$f_4\%=10$$
$$f_5\%=100-75=25$$

2ος τρόπος:

Από το παραπάνω πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό παρατηρούμε ότι: $f_1\%=15$ και $f_5\%=25$.

Γνωρίζουμε ότι η διάμεσος είναι η τιμή για την οποία το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες από αυτήν και το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες από αυτήν. Δηλαδή, ισχύει ότι:

$$\begin{cases} f_1\%+f_2\%+\frac{1}{4}f_3\%=50 \\ \frac{3}{4}f_3\%+f_4\%+f_5\%=50 \end{cases} \overset{f_2\%=3f_4\%}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 15+3f_4\%+\frac{1}{4}f_3\%=50 \\ \frac{3}{4}f_3\%+f_4\%+25=50 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3f_4\%+\frac{1}{4}f_3\%=35 \\ f_4\%+\frac{3}{4}f_3\%=25 \end{cases}$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα προκύπτει ότι $f_3\%=20$ και $f_4\%=10$.
Οπότε, $f_2\%=30$.
Οι κεντρικές τιμές των κλάσεων είναι

$$x_1=2,\ x_2=6,\ x_3=10,\ x_4=14,\ x_5=18$$

Συνεπώς,

Χρόνια προϋπηρεσίας	x_i	f_i	F_i
$0-4$	2	0,15	0,15
$4-8$	6	0,30	0,45
$8-12$	10	0,20	0,65
$12-16$	14	0,10	0,75
$16-20$	18	0,25	1
Σύνολο		1	

Β2. Η μέση τιμή ισούται:

$$\bar{x}=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{5}x_i\nu_i=\sum_{i=1}^{5}x_i\frac{\nu_i}{\nu}=\sum_{i=1}^{5}x_i f_i=x_1f_1+x_2f_2+x_3f_3+x_4f_4+x_5f_5$$
$$=2\cdot 0{,}15+6\cdot 0{,}3+10\cdot 0{,}2+14\cdot 0{,}1+18\cdot 0{,}25$$
$$=0{,}3+1{,}8+2+1{,}4+4{,}5=10$$

Για την διακύμανση ισχύει ότι:

$$s^2=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{5}\left(x_i-\bar{x}\right)^2\nu_i=\sum_{i=1}^{5}\left(x_i-\bar{x}\right)^2\frac{\nu_i}{\nu}=\sum_{i=1}^{5}\left(x_i-\bar{x}\right)^2 f_i$$
$$=\left(2-10\right)^2\cdot 0{,}15+\left(6-10\right)^2\cdot 0{,}3+\left(10-10\right)^2\cdot 0{,}2+\left(14-10\right)^2\cdot 0{,}1+\left(18-10\right)^2\cdot 0{,}25$$
$$=64\cdot 0{,}15+16\cdot 0{,}3+16\cdot 0{,}1+64\cdot 0{,}25$$
$$=64\left(0{,}15+0{,}25\right)+16\left(0{,}3+0{,}1\right)$$
$$=64\cdot 0{,}4+16\cdot 0{,}4$$
$$=80\cdot 0{,}4=32$$

Β3. Αντικαθιστώντας στον τύπο

$$s^2=\frac{1}{\nu}\left\{\sum_{i=1}^{k}x_i^2\nu_i-\frac{1}{\nu}\left(\sum_{i=1}^{k}x_i\nu_i\right)^2\right\}$$

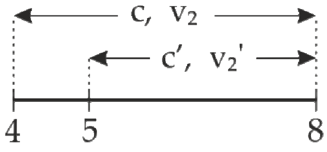
έχουμε ότι,

$$32=\frac{1}{\nu}\left[5280-\frac{1}{\nu}\cdot\left(\nu\cdot\bar{x}\right)^2\right]\Leftrightarrow 32\nu=5280-100\nu\Leftrightarrow 132\nu=5280\Leftrightarrow \nu=40$$

Οι υπάλληλοι που έχουν τουλάχιστον 5 χρόνια προϋπηρεσίας είναι

$$\nu_2'+\nu_3+\nu_4+\nu_5$$

όπου ν_2' είναι το πλήθος των υπαλλήλων που έχουν από 5-8 χρόνια.
Επειδή οι παρατηρήσεις είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες, τότε:



$$\frac{c'}{c}=\frac{\nu_2'}{\nu_2}\Leftrightarrow\frac{8-5}{8-4}=\frac{\nu_2'}{\nu\cdot f_2}\Leftrightarrow\frac{3}{4}=\frac{\nu_2'}{40\cdot 0{,}3}\Leftrightarrow\frac{3}{4}=\frac{\nu_2'}{12}\Leftrightarrow \nu_2'=9$$

Επίσης,

$$v_3 = v \cdot f_3 = 40 \cdot 0,2 = 8$$
$$v_4 = v \cdot f_4 = 40 \cdot 0,1 = 4$$
$$v_5 = v \cdot f_5 = 40 \cdot 0,25 = 10$$

Οπότε, $v_2' + v_3 + v_4 + v_5 = 9 + 8 + 4 + 10 = 31$.
Άρα, 31 υπάλληλοι έχουν τουλάχιστον 5 χρόνια προϋπηρεσία.

Β4. Έχουμε ότι

$$v_1 = v \cdot f_1 = 40 \cdot 0,15 = 6$$
$$v_2 = v \cdot f_2 = 40 \cdot 0,30 = 12$$

Εφόσον, το επίδομα για κάθε υπάλληλο δίνεται από την σχέση

$$y_i = 3x_i + 2i,\ i = 1,2,3,4,5$$

τότε το συνολικό κόστος αυτής της απόφασης θα είναι

$$y_1 v_1 + y_2 v_2 + y_3 v_3 + y_4 v_4 + y_5 v_5 =$$
$$= (3x_1 + 2)v_1 + (3x_2 + 4)v_2 + (3x_3 + 6)v_3 + (3x_4 + 8)v_4 + (3x_4 + 10)v_5$$
$$= 8 \cdot 6 + 22 \cdot 12 + 36 \cdot 8 + 50 \cdot 4 + 64 \cdot 10 = 1440 \text{ ευρώ}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Είναι $f(x) = x^2 - (P(A') + P(B'))x,\ x \in \mathbb{R}$.
Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 2x - P(A') - P(B')$.
Η εφαπτομένη της στο $M(1, f(1))$ έχει εξίσωση της μορφής:

$$y = \lambda x + \beta,\ \text{με}\ \lambda = f'(1) = 2 - P(A') - P(B')$$

Άρα $\varepsilon : y = [2 - P(A') - P(B')]x + \beta$.
Αφού $M(1, f(1))$ είναι σημείο της ε και $f(1) = 1 - P(A') - P(B')$, έχουμε:

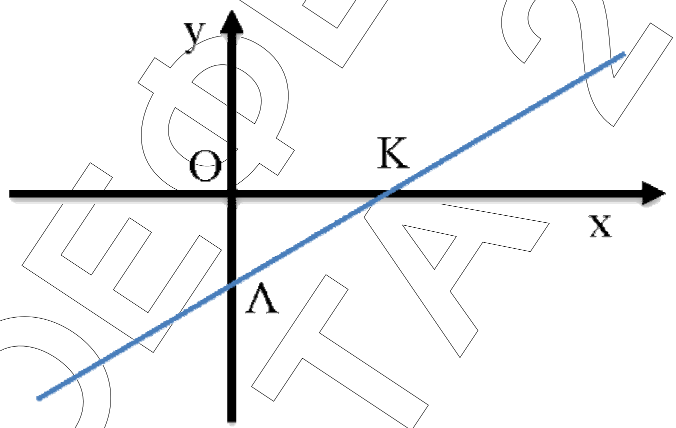
$$1 - P(A') - P(B') = 2 - P(A') - P(B') + \beta \Leftrightarrow \beta = -1$$

Επομένως $\varepsilon : y = \left[2 - P(A') - P(B')\right]x - 1 \quad (1)$.

Όμως $P(A) = 1 - P(A')$ και $P(B) = 1 - P(B')$, οπότε προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε $2 - P(A') - P(B') = P(A) + P(B)$ οπότε η (1) γράφεται

$$\varepsilon : y = \left[P(A) + P(B)\right]x - 1$$

Γ2. Για $x = 0$ είναι $y = \left[P(A) + P(B)\right] \cdot 0 - 1 = -1$, οπότε το σημείο τομής της ε και του $y'y$ είναι το $\Lambda(0, -1)$, έτσι $(O\Lambda) = |-1| = 1$.



Επίσης για $y = 0$ είναι $0 = \left[P(A) + P(B)\right]x - 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{P(A) + P(B)} > 0$,

διότι $A \neq \varnothing$ άρα $P(A) > 0$ και $P(B) \geq 0$, οπότε $P(A) + P(B) > 0$.

Επομένως το σημείο τομής της ε με τον $x'x$ είναι $K\left(\dfrac{1}{P(A) + P(B)}, 0\right)$,

έτσι $(OK) = \dfrac{1}{P(A) + P(B)}$.

Είναι

$$(OK\Lambda) = \frac{1}{2} \cdot (O\Lambda) \cdot (OK) \Leftrightarrow \frac{1}{2P(A \cup B)} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{P(A) + P(B)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B)$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = 0$$

Αφού τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα είναι

$$P(A\cap B)=\frac{N(A\cap B)}{N(\Omega)}\Leftrightarrow N(A\cap B)=0\Leftrightarrow A\cap B=\varnothing$$

Οπότε τα Α και Β είναι **ασυμβίβαστα**.

Γ3. Τα Α και Β είναι ασυμβίβαστα, οπότε

$x_1=0$

$x_2=P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

$x_3=P(A\cap B)=0$

$x_4=P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)=P(B)$

$x_5=P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=P(A)$

$x_6=P(\Omega)=1$

$x_7=P(B)$

- Αν $P(A)\le P(B)$ έχουμε
  0, 0, $P(A)$, $P(B)$, $P(B)$, $P(A)+P(B)$, 1.
- Αν $P(A)>P(B)$ έχουμε
  0, 0, $P(B)$, $P(B)$, $P(A)$, $P(A)+P(B)$, 1.

Σε κάθε περίπτωση η διάμεσος θα ισούται με την 4^{η} παρατήρηση, οπότε

$$\delta=P(B)\Leftrightarrow P(B)=\frac{1}{3}$$

Όμως

$$\bar{x}=\frac{0+0+P(A)+P(B)+P(B)+\left[P(A)+P(B)\right]+1}{7}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{8}{21}=\frac{2P(A)+3P(B)+1}{7}\Leftrightarrow 56=21\left[2P(A)+3\cdot P(B)+1\right]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 56=21\left[2P(A)+3\cdot\frac{1}{3}+1\right]\Leftrightarrow 56=42P(A)+42\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A)=\frac{14}{42}\Leftrightarrow P(A)=\frac{1}{3}$$

Έτσι $P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.

Γ4. **i.** Είναι $\overline{x}=\frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7}x_i \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{7}x_i=7\overline{x}=7\cdot\frac{8}{21}=\frac{8}{3}$, οπότε η νέα μέση τιμή είναι:

$$\overline{x}'=\frac{\sum_{i=1}^{7}x_i+x_8}{8}\Leftrightarrow\frac{1}{2}=\frac{\frac{8}{3}+\frac{1}{2}+P(\Gamma)}{8}\Leftrightarrow 4=\frac{8}{3}+\frac{1}{2}+P(\Gamma)$$

$$\Leftrightarrow P(\Gamma)=\frac{24}{6}-\frac{16}{6}-\frac{3}{6}\Leftrightarrow P(\Gamma)=\frac{5}{6}$$

Έστω Α και Γ ασυμβίβαστα. Τότε από τον απλό προσθετικό νόμο έχουμε:

$$P(A\cup\Gamma)=P(A)+P(\Gamma)=\frac{1}{3}+\frac{5}{6}=\frac{2}{6}+\frac{5}{6}=\frac{7}{6}>1,$$

το οποίο είναι **άτοπο**, οπότε τα Α και Γ **δεν είναι ασυμβίβαστα**.

ii. Είναι $A\cap\Gamma\subseteq A$ οπότε $P(A\cap\Gamma)\le P(A)=\frac{1}{3}$.

Επίσης είναι:

$$P(A\cup\Gamma)=P(A)+P(\Gamma)-P(A\cap\Gamma)\Leftrightarrow P(A\cup\Gamma)=\frac{7}{6}-P(A\cap\Gamma)$$

Ισχύει ότι:

$$P(A\cup\Gamma)\le 1\Leftrightarrow\frac{7}{6}-P(A\cap\Gamma)\le 1\Leftrightarrow\frac{7}{6}-1\le P(A\cap\Gamma)\Leftrightarrow\frac{1}{6}\le P(A\cap\Gamma)$$

Άρα $\frac{1}{6}\le P(A\cup\Gamma)\le\frac{1}{3}$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x)=\ln x-\ln(x+1),$$

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως σύνθεση και διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f''(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$$

Όμως $P(1)+P(2)+P(3)+...+P(9)=f''(1)+f''(2)+f''(3)+...+f''(9)$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$$

Οπότε $P(0)+P(1)+P(2)+...+P(9)=1 \Leftrightarrow CV+\frac{9}{10}=1 \Leftrightarrow CV=\frac{1}{10}$.

Άρα CV = 10%.

Δ2. $\sum_{i=1}^{\nu} t_i^{\,2}=(\bar{x}^2-\bar{x}+11)\cdot\nu \Leftrightarrow \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} t_i^2-\bar{x}^2=-\bar{x}+11\,(1)$

Όμως $s^2=\frac{1}{\nu}\left\{\sum_{i=1}^{k} t_i^2-\frac{1}{\nu}\left(\sum_{i=1}^{k} t_i\right)^2\right\} \Leftrightarrow s^2=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{k} t_i^2-\left(\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{k} t_i\right)^2 \Leftrightarrow s^2=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{k} t_i^2-\bar{x}^2$

$CV=\frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{s}{|\bar{x}|}=\frac{1}{10} \overset{\bar{x}>0}{\Leftrightarrow} \bar{x}=10s$.

Οπότε (1) $\Leftrightarrow s^2+\bar{x}-11=0$

Άρα $s^2+\bar{x}-11=0 \Leftrightarrow s^2+10s-11=0 \Leftrightarrow s=1$ ή $s=-11$ απορ.

Για $s=1$ έχουμε $\bar{x}=10$.

Δ3. Αν $y_1, y_2, ..., y_\nu$ οι νέες παρατηρήσεις τότε $y_i=x_i-2, i=1,2,...,\nu$.

Αν $\bar{y}$ και s', η νέα μέση τιμή και τυπική απόκλιση αντίστοιχα, τότε από γνωστή εφαρμογή του σχολικού βιβλίου είναι $\bar{y}=\bar{x}-2=8$ και $s'=s=1$. Άρα $CV'=\frac{s'}{|\bar{y}|}=\frac{1}{8}$ και το ποσοστό μεταβολής του συντελεστή μεταβλητότητας είναι $\frac{CV'-CV}{CV}\cdot 100\%=25\%$

Δ4. $s^2=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}(t_i-\bar{x})^2 \Leftrightarrow 1^2=\frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}(t_i-10)^2 \Leftrightarrow$

$(t_1-10)^2+(t_2-10)^2+...+(t_{16}-10)^2=16$

Επομένως για κάθε $i=1,2,...,16$ ισχύει:

$(t_i-10)^2\le 16 \Leftrightarrow |t_i-10|\le 4 \Leftrightarrow -4\le t_i-10\le 4 \Leftrightarrow 6\le t_i\le 14$

$$\bar{x}=\frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16} t_i \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{16} t_i=16\cdot 10 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{16} t_i=160$$

$$\overline{x}_1 = \frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15} t_i = \frac{1}{15}\left(\sum_{i=1}^{16} t_i - t_{16}\right) = \frac{1}{15}(160 - t_{16})$$

Άρα $9 = \frac{1}{15}(160 - t_{16}) \Leftrightarrow 15 \cdot 9 = 160 - t_{16} \Leftrightarrow t_{16} = 25$.

Όμως ισχύει $6 \le t_i \le 14$ άρα καμία από τις παρατηρήσεις δεν μπορεί να είναι 25.