ΤΑΞΗ: Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ / ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Τετάρτη 4 Μαΐου 2016
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 151.

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 93.

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ 22.

Α4. **α)** Λάθος.
β) Σωστό.
γ) Σωστό.
δ) Λάθος.
ε) Λάθος.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(-2, f(-2))$ είναι το $f'(-2)$, άρα λόγω της υπόθεσης ισχύει:

$$f'(-2) = 36 \ (1)$$

Η παράγωγος της f είναι:

$$f'(x) = (\alpha x^3 - 9x^2 - 24x)' \Leftrightarrow f'(x) = 3\alpha x^2 - 18x - 24$$

Επομένως λόγω της (1) έχουμε:

$$3\cdot\alpha\cdot(-2)^2 - 18\cdot(-2) - 24 = 36 \Leftrightarrow 12\alpha + 36 - 24 = 36$$
$$\Leftrightarrow 12\alpha = 24 \Leftrightarrow \alpha = 2$$

Για $\alpha = 2$ έχουμε

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 24,$$

οπότε:

$$f(-2) = -4.$$

Άρα το σημείο Α έχει συντεταγμένες $A(-2,-4)$.

Έστω $y=\lambda x+\beta$ η εξίσωση εφαπτομένης της f στο σημείο $A(-2,-4)$.

Ισχύει:

$$\lambda = f'(-2)=36$$

και το σημείο $A(-2,-4)$ ανήκει στην $y=\lambda x+\beta$ επομένως:

$$-4=36\cdot(-2)+\beta \Leftrightarrow \beta=68$$

Άρα η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση

$$y=36x+68$$

Β2. Βρίσκουμε την παράγωγο της f.

$$f'(x)=6x^2-18x-24$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 6x^2-18x-24=0 \Leftrightarrow x^2-3x-4=0$$

Η τελευταία εξίσωση είναι πολυωνυμική $2^{ου}$ βαθμού επομένως:

$$\Delta=(-3)^2-4\cdot 1(-4)=9+16=25>0$$

Άρα έχει 2 ρίζες πραγματικές και άνισες:

$$x=\frac{3\pm\sqrt{25}}{2\cdot 1}=\frac{3\pm 5}{2}=\begin{cases} x=\frac{3+5}{2} \\ ή \\ x=\frac{3-5}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ ή \\ x=-1\end{cases}$$

Το πρόσημο της f' καθώς επίσης και τα διαστήματα μονοτονίας της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	-1		4		$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−	0	+	
$f(x)$	↗		↘		↗	

Επομένως στα διαστήματα $(-\infty,-1]$ και $[4,+\infty)$ η f είναι γνησίως αύξουσα ενώ στο διάστημα $[-1,4]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Για $x=-1$ η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(-1)=13$.

Για $x=4$ η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(4)=-112$.

Β3. Το όριο γίνεται:

$$\lim_{x\to 4}\frac{f'(x)}{\sqrt{x}-4}=\lim_{x\to 4}\frac{6x^2-18x-24}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to 4}\frac{6\left(x^2-3x-4\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{6(x+1)(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}{(x-4)}=\lim_{x\to 4}6(x+1)\left(\sqrt{x}+2\right)=6\cdot 5\cdot 4=120$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Τα ενδεχόμενα που ορίστηκαν είναι τα εξής
Π: Ο κάτοικος παρακολουθεί τους αγώνες της ομάδας ποδοσφαίρου.
Μ: Ο κάτοικος παρακολουθεί τους αγώνες της ομάδας μπάσκετ.
Από τα δεδομένα προκύπτουν οι παρακάτω πιθανότητες των ενδεχομένων:

$$P(\Pi\cup M)'=0,35\ (1)$$

και

$$P(M-\Pi)=0,4\Leftrightarrow P(M)-P(M\cap\Pi)=0,4\ \ (2)$$

Ισχύει:

$$P(\Pi\cup M)=1-P(M\cup\Pi)'\overset{(1)}{\Leftrightarrow}P(M\cup\Pi)=1-0,35\Leftrightarrow P(\Pi\cup M)=0,65$$

Εφαρμόζοντας τον προσθετικό νόμο για τα Π,Μ έχουμε:

$$P(\Pi\cup M)=P(\Pi)+P(M)-P(M\cap\Pi)\overset{(2)}{\Leftrightarrow}0,65=P(\Pi)+0,40\Leftrightarrow P(\Pi)=0,25$$

Γ2. **(i)** Ορίζουμε τα ενδεχόμενα

Α:Το άτομο είναι άντρας

(επομένως το ενδεχόμενο Α΄ σημαίνει ότι το άτομο είναι γυναίκα)

Δ: Το άτομο έχει διαρκείας

Ισχύει:

$$N(\Delta)=50\Leftrightarrow 0,5N(A)+0,5N(A')=50\Leftrightarrow N(A)+N(A')=100\ (3)$$

Οπότε

$$N(\Pi)=N(A)+N(A')\Leftrightarrow N(\Pi)\overset{(3)}{=}100$$

Άρα την ομάδα ποδοσφαίρου την παρακολουθούν συνολικά 100 άτομα.

(ii) Ζητάμε τη πιθανότητα του ενδεχομένου $A\cap\Delta'=A-\Delta$

$$P(A-\Delta)=P(A)-P(A\cap\Delta)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}-\frac{N(A\cap\Delta)}{N(\Omega)}\overset{(*)}{=}\frac{70}{100}-\frac{35}{100}=\frac{35}{100}=0,35$$

$(*)$ Όμως

$$N(A')=N(A)-40 \quad (4)$$

Αντικαθιστώντας την (4) στην (3) προκύπτει:

$$N(A)+(N(A)-40)=100 \Leftrightarrow 2N(A)=140 \Leftrightarrow N(A)=70$$

Οπότε: $N(A')=N(A)-40 \Leftrightarrow N(A')=30$

$$N(A\cap\Delta)=0,5\cdot N(A)=0,5\cdot 70=35$$

Γ3. Έστω $\bar{x}$ ο μέσος όρος των αγώνων ποδοσφαίρου που παρακολουθούν το έτος τα 100 άτομα τότε $\bar{x}=16$. Έστω $\bar{x}_1$ ο μέσος όρος παρακολούθησης των αγώνων των 50 ατόμων που έχουν εισιτήριο διαρκείας τότε $\bar{x}_1=20$ ενώ $\bar{x}_2$ ο μέσος όρος των αγώνων που παρακολουθούν τα 50 άτομα που δεν έχουν εισιτήριο διαρκείας.

$$\bar{x}=\frac{\bar{x}_1\cdot v_1+\bar{x}_2\cdot v_2}{v}\Leftrightarrow 16=\frac{20\cdot 50+\bar{x}_2\cdot 50}{100}\Leftrightarrow 1600=1000+\bar{x}_2\cdot 50\Leftrightarrow \bar{x}_2=12$$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. Από τα δεδομένα έχουμε ότι:

$$\alpha_3=90^\circ \Leftrightarrow 360^\circ\cdot f_3=90^\circ \Leftrightarrow f_3=\frac{90^\circ}{360^\circ}\Leftrightarrow \boxed{f_3=0,25}$$

Επίσης:

$$F_3=0,7\Leftrightarrow f_1+f_2+f_3=0,7\overset{f_3=0,25}{\Leftrightarrow} f_1+f_2+0,25=0,7\Leftrightarrow f_1+f_2=0,45 \quad (1)$$

Όμως ισχύει:

$$f_2=2\cdot f_1 \quad (2)$$

Αντικαθιστώντας την (2) στην (1) προκύπτει:

$$f_1+2f_1=0,45\Leftrightarrow 3\cdot f_1=0,45\Leftrightarrow \boxed{f_1=0,15}$$

Επομένως από τη σχέση (2) προκύπτει:

$$\boxed{f_2=0,3}$$

Επιπλέον:

$$F_4=F_3+f_4\Leftrightarrow F_4-F_3=f_4\Leftrightarrow \boxed{f_4=0,2}$$

Επίσης

$$F_5=F_4+f_5\Leftrightarrow F_5-F_4=f_5\Leftrightarrow \boxed{f_5=0,1}$$

Δ2. Από τον τύπο $c=\frac{R}{\kappa} \Leftrightarrow c=\frac{10x_1}{5} \Leftrightarrow c=2x_1$

Αν x_1 η κεντρική τιμή της $1^{ης}$ κλάσης και c το πλάτος κλάσεων τότε ισχύει:

Η κεντρική τιμή της $2^{ης}$ κλάσης θα είναι:

$$x_2=x_1+c \Leftrightarrow x_2=3x_1$$

Η κεντρική τιμή της $3^{ης}$ κλάσης θα είναι:

$$x_3=x_1+2c \Leftrightarrow x_3=5x_1$$

Η κεντρική τιμή της $4^{ης}$ κλάσης θα είναι:

$$x_4=x_1+3c \Leftrightarrow x_4=x_1+6x_1 \Leftrightarrow x_4=7x_1$$

Η κεντρική τιμή της $5^{ης}$ κλάσης θα είναι:

$$x_5=x_1+4c \Leftrightarrow x_5=x_1+8x_1 \Leftrightarrow x_5=9x_1$$

Ισχύει:

$$\bar{x}=23 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{5} x_i \cdot f_i=23 \Leftrightarrow x_1 \cdot f_1+x_2 \cdot f_2+x_3 \cdot f_3+x_4 \cdot f_4+x_5 \cdot f_5=23$$

$$\Leftrightarrow x_1 \cdot f_1+3x_1 \cdot f_2+5x_1 \cdot f_3+7x_1 \cdot f_4+9x_1 \cdot f_5=23$$

$$\Leftrightarrow x_1(f_1+3f_2+5f_3+7f_4+9f_5)=23$$

$$\Leftrightarrow x_1(0,15+3\cdot 0,3+5\cdot 0,25+7\cdot 0,2+9\cdot 0,1)=23$$

$$4,6\cdot x_1=23 \Leftrightarrow x_1=5$$

Επομένως:

$$c=2x_1 \Leftrightarrow c=10$$

Δ3. Δεδομένου ότι το μέγεθος του δείγματος είναι $v=200$ προκύπτει:

$$f_1=\frac{v_1}{v} \Leftrightarrow v_1=200\cdot 0,15 \Leftrightarrow v_1=30$$

$$f_2=\frac{v_2}{v} \Leftrightarrow v_2=200\cdot 0,30 \Leftrightarrow v_2=60$$

$$f_3=\frac{v_3}{v} \Leftrightarrow v_3=200\cdot 0,25 \Leftrightarrow v_2=50$$

$$f_4=\frac{v_4}{v} \Leftrightarrow v_4=200\cdot 0,20 \Leftrightarrow v_4=40$$

$$f_5=\frac{v_5}{v} \Leftrightarrow v_5=200\cdot 0,1 \Leftrightarrow v_2=20$$

Από τα παραπάνω ο πίνακας συμπληρώνεται ως εξής:

Αριθμός απουσιών	**Κεντρική τιμή** x_i	v_i	$f_i\%$	$F_i\%$
$[0-10)$	**5**	**30**	**15**	**15**
$[10-20)$	**15**	**60**	**30**	**45**
$[20-30)$	**25**	**50**	**25**	**70**
$[30-40)$	**35**	**40**	**20**	**90**
$[40-50)$	**45**	**20**	**10**	**100**
ΣΥΝΟΛΟ		**200**	**100**	

Το διάστημα $15-25$ δεν αντιστοιχεί σε κάποια κλάση όμως το 15 είναι η κεντρική τιμή της 2ης κλάσης και το 25 η κεντρική τιμή της 3ης κλάσης. Θεωρούμε τα δεδομένα ομοιόμορφα κατανεμημένα στις κλάσεις επομένως στο διάστημα $15-20$ βρίσκονται οι μισοί μαθητές της 2ης κλάσης δηλαδή $\frac{v_2}{2}=\frac{60}{2}=30$ ενώ στο διάστημα $20-25$ θα βρίσκονται οι μισοί μαθητές της 3ης κλάσης δηλαδή $\frac{v_3}{2}=\frac{50}{2}=25$.

Άρα συνολικά 30+25=55 μαθητές.

Δ4. Εφόσον 30 μαθητές έχουν από $[0-10)$ απουσίες τότε έχουν περιθώριο ακόμα $[40-50)$ απουσίες.

Εφόσον 60 μαθητές έχουν από $[10-20)$ απουσίες τότε έχουν περιθώριο ακόμα $[30-40)$ απουσίες.

Εφόσον 30 μαθητές έχουν από $[20-30)$ απουσίες τότε έχουν περιθώριο ακόμα $[20-30)$ απουσίες.

Εφόσον 70 μαθητές έχουν από $[30-40)$ απουσίες τότε έχουν περιθώριο ακόμα $[10-20)$ απουσίες.

Εφόσον 20 μαθητές έχουν από $[40-50)$ απουσίες τότε έχουν περιθώριο ακόμα $[0-10)$ απουσίες.

Επομένως οι κατανομή στις κλάσεις είναι:

Αριθμός απουσιών	Κεντρική τιμή x_i	v_i	$x_i \cdot v_i$
$[0-10)$	**5**	**20**	**100**
$[10-20)$	**15**	**40**	**600**
$[20-30)$	**25**	**50**	**1250**
$[30-40)$	**35**	**60**	**2100**
$[40-50)$	**45**	**30**	**1350**
ΣΥΝΟΛΟ		**200**	**5400**

Άρα η μέση τιμή είναι: $\overline{x}' = \dfrac{\sum_{i=1}^{5} x_i \cdot v_i}{v} = \dfrac{5400}{200} = 27$