Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1°

Α. **α.** Βλέπε Πόρισμα σελίδα 251 σχολικού βιβλίου.
β. Βλέπε σελίδα 224 σχολικού βιβλίου.

Β. **α.** (Σ), **β.** (Σ), **γ.** (Σ), **δ.** (Σ).

Γ. **α.** 0, **β.** 8, **γ.** 44

ΘΕΜΑ 2°

α. Η f είναι συνεχής για $x < 0$, ως πολυωνυμική και για $x > 0$, ως άθροισμα της τριγωνομετρικής ημx με την σταθερή $c(x) = \lambda$. Στο $x_0 = 0$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (\eta\mu x + \lambda) = \lambda$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} ((\mu-1)x+1) = 1$$

Ακόμα $f(0) = 1$. Για να είναι η συνάρτηση συνεχής στο $x_0 = 0$ πρέπει και αρκεί:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \lambda = 1$$

Επομένως, η ζητούμενη τιμή είναι $\lambda = 1$.

β. Για $x > 0$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\eta\mu x + \lambda - 1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\eta\mu x + 1 - 1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$$

Για $x < 0$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{(\mu-1)x+1-1}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{(\mu-1)x}{x} = \mu - 1$$

Για να είναι η συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ πρέπει και αρκεί:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \Leftrightarrow \mu - 1 = 1 \Leftrightarrow \mu = 2$$

Επομένως, η ζητούμενη τιμή είναι $\mu = 2$.

γ. Είναι π.χ. $f(2\pi) = f(\pi) = \lambda$, άρα η συνάρτηση δεν είναι 1−1.

δ. Είναι

$$f(x)=\begin{cases}\eta\mu x+1, & \alpha\nu\ x>0\\ x+1, & \alpha\nu\ x\le 0\end{cases}$$

και

$$\int_{-2}^{\pi} f(x)\,dx=\int_{-2}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{\pi} f(x)\,dx=\int_{-2}^{0}(x+1)\,dx+\int_{0}^{\pi}(\eta\mu x+1)\,dx=$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_{-2}^{0}+\ [-\sigma\upsilon\nu x+x]_{0}^{\pi}=\pi+2$$

<u>ΘΕΜΑ 3ο</u>

α. **i.** Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι :

$$f'(x)=(e^{1-e^x})'=(1-e^x)'\cdot e^{1-e^x}=-e^x e^{1-e^x}=-e^{1+x-e^x}$$

Επειδή $e^{1+x-e^x}>0$ είναι $f'(x)<0$ στο $\mathbb{R}$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

ii. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι:

$$f''(x)=(-e^{1+x-e^x})'=-(1+x-e^x)'\cdot e^{1+x-e^x}=-(1-e^x)\cdot e^{1+x-e^x}=(e^x-1)\cdot e^{1+x-e^x}$$

Έτσι: $f''(x)=0 \Leftrightarrow (e^x-1)\cdot e^{1+x-e^x}=0 \Leftrightarrow e^x-1=0 \Leftrightarrow e^x=1 \Leftrightarrow x=0$

και $f''(x)>0 \Leftrightarrow x>0$, $f''(x)<0 \Leftrightarrow x<0$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $f''(x)<0$ στο διάστημα $(-\infty, 0)$, άρα στρέφει τα κοίλα κάτω στο διάστημα $(-\infty, 0]$. Ακόμα είναι $f''(x)>0$ στο διάστημα $(0,+\infty)$, άρα η f στρέφει τα κοίλα άνω στο $[0, +\infty)$.

Τέλος, η συνάρτηση έχει σημείο καμπής το (0, f (0)), γιατί εκατέρωθεν του αλλάζει κυρτότητα και υπάρχει η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης σ' αυτό, αφού είναι παραγωγίσιμη.

Είναι $f(0)=e^{1-1}=e^0=1$ έτσι, η συνάρτηση έχει σημείο καμπής το (0, 1).

β. Θα βρούμε, αν υπάρχουν, τα όρια:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(e^{1-e^x}) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(e^{1-e^x})$$

Θέτουμε $u=1-e^x$ οπότε:

$$\lim_{x\to+\infty} u=\lim_{x\to+\infty}(1-e^x)=-\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty} u=\lim_{x\to-\infty}(1-e^x)=1-0=0$$

Τότε είναι:

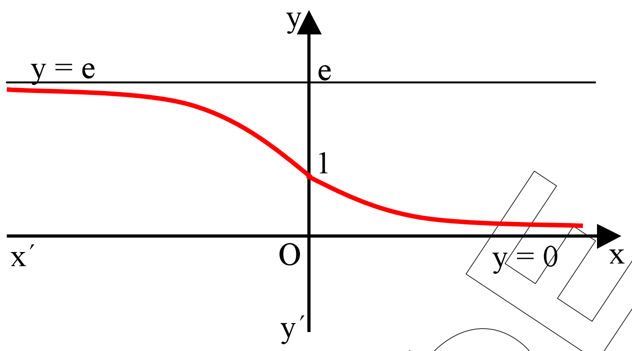
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(e^{1-e^x})=\lim_{u\to-\infty} e^u=0$$

και

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (e^{1-e^{x}}) = \lim_{u\to 1}(e^{u}) = e$$

Επομένως, η γραφική παράσταση της συνάρτησης έχει οριζόντια ασύμπτωτη την $y = 0$ στο $+\infty$ και την $y = e$ στο $-\infty$.

γ. Με βάση τις πληροφορίες των προηγουμένων ερωτημάτων σχεδιάζουμε την γραφική παράσταση της συνάρτησης:



x	$-\infty$		0		$+\infty$
f΄(x)		−	|	−	
f΄΄(x)		−	|	+	
f (x)	e	↘	$\boxed{1}$	↘	0

δ. Στο α ερώτημα βρήκαμε $f΄(x) < 0$, οπότε $|f΄(x)| = -f΄(x)$ και έτσι:

$$E = \int_{\ln\frac{1}{2}}^{0} |f'(x)|\,dx = -\int_{\ln\frac{1}{2}}^{0} f'(x)\,dx = -\left[f(x)\right]_{\ln\frac{1}{2}}^{0} = -f(0) + f\left(\ln\frac{1}{2}\right) =$$

$$= -e^{1-e^{0}} + e^{1-e^{\ln\frac{1}{2}}} = -1 + e^{1/2} \text{ τμ}$$

<u>ΘΕΜΑ 4ο</u>

α. Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς, οι συναρτήσεις $\int_1^x f(t)\,dt$ και $\int_0^x g(t)\,dt$, που ορίζονται από ολοκλήρωμα, είναι παραγωγίσιμες, έτσι μπορούμε να παραγωγίσουμε και τα δύο μέλη της (1), οπότε έχουμε:

$$\left(\int_1^x f(t)\,dt - 2\right)' = \left(x\int_0^x g(t)\,dt\right)'$$

$$\text{ή} \quad f(x) = x\,g(x) + \int_0^x g(t)\,dt \qquad (3)$$

Για $x = 0$ παίρνουμε: $f(0) = 0 + \int_0^0 g(t)\,dt = 0$

Με $x \neq 0$ από την (3) έχουμε:

$$\frac{f(x)}{x} = g(x) + \frac{\int_0^x g(t)\,dt}{x}$$

και:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(g(x)+\frac{\int_0^x g(t)\,dt}{x}\right)$$

Επειδή η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $x_0 = 0$, είναι $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = g(0)$.

Η συνάρτηση $h(x) = \int_0^x g(t)\,dt$, $x\in\mathbb{R}$, είναι παραγωγίσιμη, άρα είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, οπότε:

$$\lim_{x\to 0}\int_0^x g(t)\,dt=\lim_{x\to 0}h(x)=h(0)=\int_0^0 g(t)\,dt=0$$

Επομένως, το όριο:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x g(t)\,dt}{x}$$

είναι μορφή 0/0 και υπολογίζεται με τον κανόνα του De L' Hospital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x g(t)\,dt}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\int_0^x g(t)\,dt)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{1}=g(0)$$

Έτσι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(g(x)+\frac{\int_0^x g(t)\,dt}{x}\right)=2g(0)$$

οπότε, τελικά:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2g(0)$$

β. Η (1) για $x = 1$ δίνει $\quad -2=\int_0^1 g(t)\,dt \qquad (4)$

Επειδή η g(x) δεν μηδενίζεται και είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ διατηρεί πρόσημο σ' αυτό. Αν ήταν $g(x) > 0$ τότε

$$\int_0^1 g(t)\,dt>0 \Leftrightarrow -2>0$$

Άτοπο. Άρα είναι $g(x) < 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

γ. Η (1) για $x = 0$ δίνει $\int_1^0 f(t)\,dt-2=0 \Leftrightarrow \int_1^0 f(t)\,dt=2 \qquad (5)$

Είναι $g(x) < 0 \Leftrightarrow -g(x) > 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, έτσι:

- με $x \geq 0$ είναι $\int_0^x[-g(t)]dt\geq 0 \Leftrightarrow \int_0^x g(t)\,dt\leq 0$, άρα: $x\int_0^x g(t)\,dt\leq 0$
- με $x < 0$ είναι $\int_x^0[-g(t)]dt>0 \Leftrightarrow \int_x^0 g(t)\,dt>0$, άρα: $x\int_0^x g(t)\,dt<0$

Επομένως, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ από την (1) είναι:

$$x\int_0^x g(t)\,dt\leq 0 \Leftrightarrow \int_1^x f(t)\,dt-2\leq 0$$

$$\Leftrightarrow \int_1^x f(t)\,dt \le 2 \qquad [\int_1^0 f(t)\,dt = 2 \text{ από (5)}]$$

$$\Leftrightarrow \int_1^x f(t)\,dt \le \int_1^0 f(t)\,dt$$

2^{ος} τρόπος: Έστω η συνάρτηση $F(x) = \int_1^x f(t)\,dt$, $x \in \mathbb{R}$ για την οποία $F'(x) = f(x)$. Από την (3), αφού $g(x) < 0$, βρίσκουμε:

- με $x > 0$ είναι $f(x) = x\,g(x) + \int_0^x g(t)\,dt < 0 \Leftrightarrow F'(x) < 0$
- με $x = 0$ είναι $f(0) = 0 \Leftrightarrow F'(x) = 0$
- με $x < 0$ είναι $f(x) = x\,g(x) + \int_0^x g(t)\,dt > 0 \Leftrightarrow F'(x) > 0$

οπότε η $F(x)$ έχει μέγιστο το $F(0)$, άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$:

$$F(x) \le F(0) \Leftrightarrow \int_1^x f(t)\,dt \le \int_1^0 f(t)\,dt$$

δ. (Απόδειξη με Rolle σε αρχική). Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$H(x) = \int_0^x f(t)\,dt - 2\int_0^x g(t)\,dt - 2x \text{ με } x \in [0, 1]$$

Επειδή οι f, g είναι συνεχείς, οι συναρτήσεις $\int_0^x f(t)\,dt$ και $\int_0^x g(t)\,dt$ ως οριζόμενες από ολοκλήρωμα, είναι παραγωγίσιμες. Ακόμα η $2x$ είναι παραγωγίσιμη, ως πολυωνυμική, άρα η $H(x)$, ως αλγεβρικό άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων, είναι:

- Παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της, άρα και στο (0, 1) με

$$H'(x) = f(x) - 2g(x) - 2$$

- συνεχής στο [0, 1], ως παραγωγίσιμη σ' αυτό.

Ακόμα:

- $H(0) = 0$ και

$$H(1) = \int_0^1 f(t)\,dt - 2\int_0^1 g(t)\,dt - 2$$

$$= -\int_1^0 f(t)\,dt - 2\int_0^1 g(t)\,dt - 2$$

$$= -2 - 2\cdot(-2) - 2 = 0 \qquad [\text{ από (4) και (5) }]$$

Επομένως, εφαρμόζεται για την $H(x)$ το θεώρημα του Rolle, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, 1)$ με

$$H'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) - 2g(\xi) - 2 = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = 2g(\xi) + 2,$$

που σημαίνει ότι το ξ είναι ρίζα στο (0, 1) της εξίσωσης $f(x) = 2g(x) + 2$.