

ΤΑΞΗ: Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ

Ημερομηνία: Πέμπτη 7 Ιανουαρίου 2016

Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Βλέπε απόδειξη σχολικού βιβλίου σελ. 62.

A2. $\alpha \rightarrow$ Λάθος $\beta \rightarrow$ Λάθος $\gamma \rightarrow$ Σωστό $\delta \rightarrow$ Λάθος $\varepsilon \rightarrow$ Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B1. α. 1^{ος} τρόπος

$$A = \left[\frac{(xy)^3}{xy^6} \right]^{-1} : \left(\frac{y}{x} \right)^3 = \left[\frac{xy^6}{(xy)^3} \right]^1 : \frac{y^3}{x^3} = \frac{xy^6}{(xy)^3} \cdot \frac{x^3}{y^3} = \frac{xy^6 x^3}{x^3 y^3 y^3} =$$

$$= \frac{x^4 y^6}{x^3 y^6} = \frac{x^4}{x^3} = x$$

2^{ος} τρόπος

$$A = \left[\frac{(xy)^3}{xy^6} \right]^{-1} : \left(\frac{y}{x} \right)^3 = \frac{[(xy)^3]^{-1}}{(xy^6)^{-1}} : \frac{y^3}{x^3} = \frac{(xy)^{-3}}{(xy^6)^{-1}} \cdot \frac{x^3}{y^3} = \frac{x^{-3} y^{-3}}{x^{-1} y^{-6}} \cdot \frac{x^3}{y^3} =$$

$$= \frac{x^{-3} y^{-3} x^3}{x^{-1} y^{-6} y^3} = \frac{x^0 y^{-3}}{x^{-1} y^{-3}} = \frac{1}{x^{-1}} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$$

β. 1^{ος} τρόπος

$$B = -(2-y)(y-2) + 8y = (y-2)(y-2) + 8y = (y-2)^2 + 8y =$$

$$= y^2 - 4y + 4 + 8y = y^2 + 4y + 4 = (y+2)^2$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2016
Α' ΦΑΣΗ

Ε_3.Μλ1Α(α)

2^{ος} τρόπος

$$\begin{aligned} B &= -(2-y)(y-2) + 8y = -(2y-4-y^2+2y) + 8y = \\ &= -(4y-y^2-4) + 8y = -4y+y^2+4+8y = \\ &= y^2+4y+4 = (y+2)^2 \end{aligned}$$

γ. 1^{ος} τρόπος

$$\begin{aligned} \Gamma &= (1+\omega^2)^2 - (1-\omega^2)^2 = [1+\omega^2+1-\omega^2] \cdot [1+\omega^2-(1-\omega^2)] = \\ &= 2(1+\omega^2-1+\omega^2) = 2 \cdot 2\omega^2 = 4\omega^2 \end{aligned}$$

2^{ος} τρόπος

$$\begin{aligned} \Gamma &= (1+\omega^2)^2 - (1-\omega^2)^2 = 1+2\omega^2+(\omega^2)^2 - [1-2\omega^2+(\omega^2)^2] = \\ &= 1+2\omega^2+\omega^4-1+2\omega^2-\omega^4 = 2\omega^2+2\omega^2 = 4\omega^2 \end{aligned}$$

B2. Ισχύει:

$$\begin{aligned} (|x|-1)^2 + B + \Gamma &= 0 \Leftrightarrow \\ (|x|-1)^2 + (y+2)^2 + 4\omega^2 &= 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Επειδή $(|x|-1)^2 \geq 0$ και $(y+2)^2 \geq 0$ και $4\omega^2 \geq 0$ από (1) προκύπτουν:

$$(|x|-1)^2 = 0 \Leftrightarrow |x|-1=0 \Leftrightarrow |x|=1 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 & \text{ΔΕΚΤΗ αφού } x < 0 \\ \text{ή} \\ x=1 & \text{ΑΠΟΡΡΙΠΤΕΤΑΙ αφού } x < 0 \end{cases}$$

και

$$(y+2)^2 = 0 \Leftrightarrow y+2=0 \Leftrightarrow y=-2 \quad \text{ΔΕΚΤΗ}$$

και

$$4\omega^2 = 0 \Leftrightarrow \omega^2 = 0 \Leftrightarrow \omega = 0 \quad \text{ΔΕΚΤΗ}$$

Άρα $(x, y, \omega) = (-1, -2, 0)$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2016
Α΄ ΦΑΣΗ

E_3.Μλ1Α(α)

ΘΕΜΑ Γ

$A \cup B$ είναι το ενδεχόμενο ο μαθητής να έχει ένα τουλάχιστον από τα δύο χόμπι.

Τότε από τον κλασσικό ορισμό της πιθανότητας προκύπτουν:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{60}{200} = \frac{3}{10} = 0,3$$

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{160}{200} = \frac{8}{10} = 0,8$$

$$P(A \cup B) = \frac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} = \frac{180}{200} = \frac{9}{10} = 0,9$$

Γ1. α. $A \cap B$ είναι το ενδεχόμενο ο μαθητής να έχει και τα δύο χόμπι.

Από τον προσθετικό νόμο ισχύει:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow$$

$$0,9 = 0,3 + 0,8 - P(A \cap B) \Leftrightarrow$$

$$P(A \cap B) = 1,1 - 0,9 \Leftrightarrow$$

$$P(A \cap B) = 0,2$$

β. $P(B') = 1 - P(B) \Leftrightarrow$

$$P(B') = 1 - 0,8 \Leftrightarrow$$

$$P(B') = 0,2$$

οπότε $P(B') = P(A \cap B)$

Γ2. α. $B - A$ είναι το ενδεχόμενο ο μαθητής να ασχολείται μόνο με υπολογιστές.

Τότε:

$$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow$$

$$P(B - A) = 0,8 - 0,2 \Leftrightarrow$$

$$P(B - A) = 0,6$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2016
Α΄ ΦΑΣΗ

E_3.Μλ1Α(α)

β. $(A \cup B)'$ είναι το ενδεχόμενο ο μαθητής να μην έχει κανένα από τα δύο παραπάνω χόμπι.

Τότε:

$$P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B) \Leftrightarrow$$

$$P(A \cup B)' = 1 - 0,9 \Leftrightarrow$$

$$P(A \cup B)' = 0,1$$

Γ3. α. $(A - B) \cup (B - A)$ είναι το ενδεχόμενο ο μαθητής να ασχολείται μόνο με ένα από τα δύο παραπάνω χόμπι.

Τότε:

$$P((A - B) \cup (B - A)) \stackrel{A-B, B-A}{=} \underset{\text{ασυμβίβαστα}}{=} P(A - B) + P(B - A) =$$

$$P(A) - P(A \cap B) + 0,6 =$$

$$0,3 - 0,2 + 0,6 = 0,7$$

$$0,3 - 0,2 + 0,6 = 0,7$$

$$\text{Άρα } P((A - B) \cup (B - A)) = 0,7$$

β. $A' \cup B'$ ή $(A \cap B)'$ είναι το ενδεχόμενο ο μαθητής να μην ασχολείται με υπολογιστές ή να μην ασχολείται με τον αθλητισμό.

1^{ος} τρόπος

$$P(A' \cup B') = P(A') + P(B') - P(A' \cap B') =$$

$$P(A') + P(B') - P(A' - B) =$$

$$P(A') + P(B') - (P(A') - P(A' \cap B)) =$$

$$P(A') + P(B') - P(A') + P(A' \cap B) =$$

$$P(B') + P(B) - P(A \cap B) =$$

$$1 - P(A \cap B) =$$

$$1 - 0,2 = 0,8$$

$$\text{Άρα } P(A' \cup B') = 0,8$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2016
Α' ΦΑΣΗ

Ε_3.Μλ1Α(α)

2^{ος} τρόπος

$$P(A' \cup B') = P(A \cap B)' =$$

$$1 - P(A \cap B) =$$

$$1 - 0,2 = 0,8$$

$$\text{Άρα } \boxed{P(A' \cup B') = 0,8}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για $\alpha \geq 1$ έχουμε,

$$A = \sqrt{\alpha - 2\sqrt{\alpha - 1}} - 2\sqrt{\alpha - 2\sqrt{\alpha - 1}} \cdot \sqrt{\alpha + 2\sqrt{\alpha - 1}} + \sqrt{\alpha + 2\sqrt{\alpha - 1}}^2 =$$

$$\alpha - 2\sqrt{\alpha - 1} - 2\sqrt{\alpha^2 - (2\sqrt{\alpha - 1})^2} + \alpha + 2\sqrt{\alpha - 1} =$$

$$2\alpha - 2\sqrt{\alpha^2 - 4(\alpha - 1)} =$$

$$2\alpha - 2\sqrt{\alpha^2 - 4\alpha + 4} =$$

$$2\alpha - 2\sqrt{(\alpha - 2)^2} =$$

$$2\alpha - 2|\alpha - 2|$$

$$B = (\sqrt{\alpha} + 1)(\sqrt[4]{\alpha} + 1)(\sqrt[8]{\alpha} + 1)(\sqrt[8]{\alpha} - 1) =$$

$$(\sqrt{\alpha} + 1)(\sqrt[4]{\alpha} + 1)(\sqrt[8]{\alpha^2} - 1) =$$

$$(\sqrt{\alpha} + 1)(\sqrt[4]{\alpha} + 1)(\sqrt[4]{\alpha} - 1) =$$

$$(\sqrt{\alpha} + 1)(\sqrt[4]{\alpha^2} - 1) =$$

$$(\sqrt{\alpha} + 1)(\sqrt{\alpha} - 1) =$$

$$\sqrt{\alpha^2} - 1^2 =$$

$$\alpha - 1$$

Δ2. Αφού $\alpha \geq 2$ είναι $\alpha - 2 \geq 0$. Επομένως $|\alpha - 2| = \alpha - 2$

$$\text{Άρα } A = 2\alpha - 2(\alpha - 2) = 2\alpha - 2\alpha + 4 = 4$$

$$\alpha. |A + B| = |4 + \alpha - 1| = |\alpha + 3| = \alpha + 3 \text{ αφού για } \alpha \geq 2 \text{ είναι } \alpha + 3 > 0$$

β. Είναι $\alpha^2 x = |A+B| + 4x - 1$ και αφού $|A+B| = \alpha + 3$ είναι

$$\alpha^2 x = \alpha + 3 + 4x - 1 \text{ ή}$$

$$\alpha^2 x - 4x = \alpha + 2 \text{ ή}$$

$$(\alpha^2 - 4)x = \alpha + 2 \text{ ή}$$

$$(\alpha + 2)(\alpha - 2)x = \alpha + 2$$

Είναι $\alpha \geq 2$ επομένως $\alpha + 2 \neq 0$. Διαιρώντας την τελευταία σχέση με $\alpha + 2$ έχουμε $(\alpha - 2)x = 1$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $\alpha - 2 = 0$ δηλαδή αν $\alpha = 2$ η εξίσωση γίνεται $0x = 1$ που είναι αδύνατη.
- Αν $\alpha \neq 2$ τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x = \frac{1}{\alpha - 2}$

Δ3. 1^{ος} τρόπος

Είναι $x_0 = \frac{1}{\alpha - 2}$ για $\alpha > 2$

Έχουμε $x_0^2 = \left(\frac{1}{\alpha - 2}\right)^2 > 0$, για κάθε $\alpha > 2$

Διαιρούμε με $x_0^2 > 0$ και τα δύο μέλη της $(x_0 - 1)^2 + x_0^2 > (6 - 2\alpha)x_0^2$ και έχουμε

$$\left(\frac{x_0 - 1}{x_0}\right)^2 + \frac{x_0^2}{x_0^2} > 6 - 2\alpha \Leftrightarrow$$

$$\left(1 - \frac{1}{x_0}\right)^2 + 1 - 6 + 2\alpha > 0 \Leftrightarrow$$

$$[1 - (\alpha - 2)]^2 - 5 + 2\alpha > 0 \Leftrightarrow$$

$$(1 - \alpha + 2)^2 - 5 + 2\alpha > 0 \Leftrightarrow$$

$$(3 - \alpha)^2 - 5 + 2\alpha > 0 \Leftrightarrow$$

$$9 - 6\alpha + \alpha^2 - 5 + 2\alpha > 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 - 4\alpha + 4 > 0 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha - 2)^2 > 0 \text{ που είναι αληθής για } \alpha > 2$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2016
Α΄ ΦΑΣΗ

Ε_3.Μλ1Α(α)

2^{ος} τρόπος

Για $x_0 = \frac{1}{\alpha-2}$ έχουμε

$$(x_0 - 1)^2 + x_0^2 > (6 - 2\alpha)x_0^2 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{1}{\alpha-2} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{\alpha-2}\right)^2 > (6 - 2\alpha)\left(\frac{1}{\alpha-2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{1}{\alpha-2} - \frac{\alpha-2}{\alpha-2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\alpha-2}\right)^2 > (6 - 2\alpha)\left(\frac{1}{\alpha-2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{1-\alpha+2}{\alpha-2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\alpha-2}\right)^2 > (6 - 2\alpha)\left(\frac{1}{\alpha-2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{3-\alpha}{\alpha-2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\alpha-2}\right)^2 > (6 - 2\alpha)\left(\frac{1}{\alpha-2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{3-\alpha}{\alpha-2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\alpha-2}\right)^2 - 2(3-\alpha)\left(\frac{1}{\alpha-2}\right)^2 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{3-\alpha}{\alpha-2} - \frac{1}{\alpha-2}\right)^2 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{3-\alpha-1}{\alpha-2}\right)^2 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{2-\alpha}{\alpha-2}\right)^2 > 0 \Leftrightarrow$$

$$(-1)^2 > 0 \Leftrightarrow$$

$1 > 0$ που ισχύει

3^{ος} τρόπος

Το 1^ο μέλος της δοθείσας σχέσης για $x_0 = \frac{1}{\alpha-2}$ γίνεται

$$(x_0 - 1)^2 + x_0^2 =$$

$$\left(\frac{1}{\alpha-2} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{\alpha-2}\right)^2 =$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2016
 Α΄ ΦΑΣΗ

Ε_3.Μλ1Α(α)

$$\left(\frac{1-(\alpha-2)}{\alpha-2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\alpha-2}\right)^2 =$$

$$\left(\frac{1-\alpha+2}{\alpha-2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\alpha-2}\right)^2 =$$

$$\left(\frac{3-\alpha}{\alpha-2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\alpha-2}\right)^2 \quad (1)$$

Γνωρίζουμε ότι για κάθε $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ με $\beta \neq \gamma$ ισχύει:

$$(\beta - \gamma)^2 > 0 \Leftrightarrow \beta^2 - 2\beta\gamma + \gamma^2 > 0 \Leftrightarrow \beta^2 + \gamma^2 > 2\beta\gamma \quad (2)$$

Έστω $\beta = \frac{3-\alpha}{\alpha-2}$ και $\gamma = \frac{1}{\alpha-2}$ με $\alpha-2 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 2$

$$\text{Αν } \beta = \gamma \Leftrightarrow \frac{3-\alpha}{\alpha-2} = \frac{1}{\alpha-2} \Leftrightarrow 3-\alpha = 1 \Leftrightarrow 3-1 = \alpha \Leftrightarrow \alpha = 2 \text{ άτοπο}$$

Άρα $\beta \neq \gamma$

Τότε για κάθε $\alpha > 2$ λόγω της (2), από την (1) έχουμε:

$$\left(\frac{3-\alpha}{\alpha-2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\alpha-2}\right)^2 > 2\left(\frac{3-\alpha}{\alpha-2}\right)\left(\frac{1}{\alpha-2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{3-\alpha}{\alpha-2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\alpha-2}\right)^2 > \frac{2(3-\alpha)}{(\alpha-2)^2} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{3-\alpha}{\alpha-2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\alpha-2}\right)^2 > (6-2\alpha) \frac{1}{(\alpha-2)^2} \Leftrightarrow$$

$$(x_0 - 1)^2 + x_0^2 > (6-2\alpha) x_0^2 \text{ για κάθε } \alpha > 2$$