

**ΤΑΞΗ:** Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
**ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ:** ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ  
**ΜΑΘΗΜΑ:** ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

**Ημερομηνία:** Πέμπτη 7 Ιανουαρίου 2016  
**Διάρκεια Εξέτασης:** 2 ώρες

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

- A1. Σχολικό βιβλίο σελ. 38.  
A2. α) Λάθος (γιατί  $\lambda = -\frac{A}{B}$ )  
β) Σωστό  
γ) Λάθος ( $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{\beta} \cdot \text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{a}$ )  
δ) Λάθος (γιατί δεν ορίζεται ο λ)  
ε) Σωστό

**ΘΕΜΑ Β**

**B1. α' τρόπος**

Έστω  $B(x,y)$  τότε θα είναι:

$$\overline{AK} = \overline{KB} \Leftrightarrow (-1-1, 4-2) = (x+1, y-4) \Leftrightarrow \begin{cases} -2 = x+1 \\ 2 = y-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 6 \end{cases} \text{ δηλαδή}$$

$B(-3,6)$ .

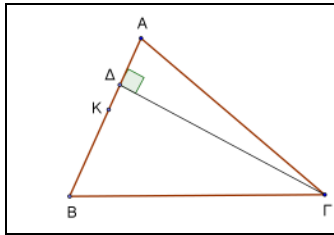
**β' τρόπος**

$$x_K = \frac{x_A + x_B}{2} \Leftrightarrow -1 = \frac{1 + x_B}{2} \Leftrightarrow x_B = -2 - 1 = -3$$

$$\text{και } y_K = \frac{y_A + y_B}{2} \Leftrightarrow 4 = \frac{2 + y_B}{2} \Leftrightarrow y_B = 8 - 2 = 6 \text{ δηλαδή } B(-3,6).$$

**B2.**  $\overline{A\Gamma} = (4,3) \Leftrightarrow (x_{\Gamma}-1, y_{\Gamma}-2) = (4,3) \Leftrightarrow \begin{cases} x_{\Gamma}-1=4 \\ y_{\Gamma}-2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{\Gamma}=5 \\ y_{\Gamma}=5 \end{cases}$

Δηλαδή  $\Gamma(5,5)$  οπότε  $\overline{B\Gamma} = (5+3, 5-6) = (8,-1)$ .



Η προβολή του  $\overline{B\Gamma}$  πάνω στο  $\overline{BA}$  είναι το  $\overline{B\Delta}$  και αφού

$$\overline{B\Delta} // \overline{BA} \Leftrightarrow \overline{B\Delta} = \lambda \cdot \overline{BA} = \lambda(1+3, 2-6) = \lambda(4, -4) = (4\lambda, -4\lambda)$$

Θα είναι

$$\overline{B\Gamma} \cdot \overline{BA} = \overline{BA} \cdot \overline{B\Delta} \Leftrightarrow (8,-1)(4,-4) = (4,-4)(4\lambda,-4\lambda) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 32+4 = 16\lambda+16\lambda \Leftrightarrow 36 = 32\lambda \Leftrightarrow \lambda = \frac{36}{32} = \frac{9}{8}$$

οπότε  $\overline{B\Delta} = \left(\frac{9}{2}, -\frac{9}{2}\right)$ .

**B3.**  $\overline{AK} - 2\overline{K\Gamma} = (-1-1, 4-2) - 2(5+1, 5-4) = (-2, 2) + (-12, -2) = (-14, 0)$

Οπότε  $|\overline{AK} - 2\overline{K\Gamma}| = \sqrt{(-14)^2 + 0^2} = \sqrt{196} = 14$

### ΘΕΜΑ Γ

**Γ1.** Το B είναι το σημείο τομής των AB και BA.

Λύνω το (Σ) των εξισώσεων τους.

$$\begin{cases} 2x - y + 4 = 0 \\ y = 11 - 5x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 11 + 5x + 4 = 0 \\ y = 11 - 5x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 7 \\ y = 11 - 5x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 6 \end{cases}$$

δηλαδή  $B(1,6)$ .

**Γ2.** Η πλευρά AΓ είναι κάθετη στο ύψος BΔ, οπότε

$$\lambda_{A\Gamma} \cdot \lambda_{B\Delta} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{A\Gamma} \cdot (-5) = -1 \Leftrightarrow \lambda_{A\Gamma} = \frac{1}{5}$$

Άρα  $A\Gamma: y - 4 = \frac{1}{5}(x - 5) \Leftrightarrow 5y - 20 = x - 5 \Leftrightarrow x - 5y + 15 = 0$ .

**Γ3.** Το μέσο M της BΓ είναι  $M\left(\frac{1+5}{2}, \frac{4+6}{2}\right) = (3,5)$ .

Ο συντελεστής της BΓ είναι  $\lambda_{B\Gamma} = \frac{4-6}{5-1} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$ .

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2016**  
Α ΦΑΣΗ

**E\_3.Mλ2Θ(α)**

Αφού η μεσοκάθετη  $\varepsilon \perp ΒΓ$  θα έχει  $\lambda_\varepsilon=2$  και η εξίσωσή της θα είναι:

$$y-5=2(x-3) \Leftrightarrow y-5=2x-6 \Leftrightarrow 2x-y-1=0.$$

Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων των ΒΔ και (ε):

$$\left. \begin{array}{l} \text{ΒΔ: } y=11-5x \\ \varepsilon: 2x-y-1=0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left( \begin{array}{l} y=11-5x \\ 2x-11+5x-1=0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left( \begin{array}{l} y=11-5x \\ 7x=12 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left( \begin{array}{l} y=11-\frac{60}{7}=\frac{17}{7} \\ x=\frac{12}{7} \end{array} \right)$$

δηλαδή τέμνονται στο  $Z\left(\frac{12}{7}, \frac{17}{7}\right)$ .

**ΘΕΜΑ Δ**

**Δ1.** Είναι  $x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{\kappa + 4}{2}$

και  $y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{5 + \kappa + 4}{2} = \frac{\kappa + 9}{2}$ .

Άρα  $\kappa = 2x_M - 4$  και  $\kappa = 2y_M - 9$  οπότε  $2x_M - 4 = 2y_M - 9 \Leftrightarrow 2x_M - 2y_M + 5 = 0$   
δηλαδή το Μ κινείται στην ευθεία  $2x - 2y + 5 = 0$ .

**Δ2.** Είναι  $\overline{AB} = (4 - \kappa, \kappa + 4 - 5) = (4 - \kappa, \kappa - 1)$  και  $\varepsilon_1 // \overline{\delta}_1 = (1, 2)$ .

Αν  $\overline{AB} // \varepsilon_1 \Leftrightarrow \overline{AB} // \overline{\delta}_1 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 4 - \kappa & \kappa - 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 8 - 2\kappa - \kappa + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9 = 3\kappa \Leftrightarrow \kappa = 3$  οπότε  $A(3, 5)$  και  $B(4, 7)$ .

Άρα  $\varepsilon: y - 5 = 2(x - 3) \Leftrightarrow y - 5 = 2x - 6 \Leftrightarrow 2x - y - 1 = 0$ .

**Δ3. α)**  $\vec{u} \cdot \vec{v} = (2\vec{a} + 3\vec{\beta})(\vec{a} - 2\vec{\beta}) = 2\vec{a}^2 - 4\vec{a}\vec{\beta} + 3\vec{a}\vec{\beta} - 6\vec{\beta}^2 =$

$= 2|\vec{a}|^2 - \vec{a}\vec{\beta} - 6|\vec{\beta}|^2 = 2 \cdot 2^2 - |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}| \cos \nu \frac{2\pi}{3} - 6 \cdot 1^2 =$

$= 2 \cdot 4 - 2 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 6 = 8 + 1 - 6 = 3$

και  $|\vec{v}|^2 = \vec{v}^2 = (\vec{a} - 2\vec{\beta})^2 = \vec{a}^2 - 4\vec{a}\vec{\beta} + 4\vec{\beta}^2 =$

$|\vec{a}|^2 - 4 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}| \cos \nu \frac{2\pi}{3} + 4|\vec{\beta}|^2 = 4 - 4 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 4 \cdot 1 = 12 \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2016**  
 Α ΦΑΣΗ

**E\_3.Μλ2Θ(α)**

β) Αφού  $\Gamma \in (\varepsilon)$ :  $y = 2x - 1$  θα είναι  $\Gamma(x_\Gamma, 2x_\Gamma - 1)$

Έχουμε:

$$\begin{aligned} & (\vec{u} \cdot \vec{v}) \overline{B\Gamma} + (|\vec{v}|^2 - 2) \overline{AB} = (4, \mu + 1) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow 3\overline{B\Gamma} + (12 - 2)\overline{AB} = (4, \mu + 1) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow 3(x_\Gamma - 4, 2x_\Gamma - 1 - 7) + 10(4 - 3, 7 - 5) = (4, \mu + 1) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow (3x_\Gamma - 12, 6x_\Gamma - 24) + (10, 20) = (4, \mu + 1) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow (3x_\Gamma - 12, 6x_\Gamma - 24) = (4, \mu + 1) - (10, 20) = (-6, \mu - 19) \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_\Gamma - 12 = -6 \\ 6x_\Gamma - 24 = \mu - 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_\Gamma = \frac{12 - 6}{3} \\ \mu = 6x_\Gamma - 24 + 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_\Gamma = 2 \\ \mu = 7 \end{cases}. \text{ Άρα } \Gamma(2, 3) \end{aligned}$$