

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2017
Α ΦΑΣΗ

E_3.ΜΕΛ3Γ(α)

ΤΑΞΗ: 3^η ΤΑΞΗ ΕΠΑ.Λ.

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι/ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Σάββατο 7 Ιανουαρίου 2017

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω η συνάρτηση $F(x) = c \cdot f(x)$. Έχουμε:

$$F(x+h) - F(x) = c \cdot f(x+h) - c \cdot f(x) = c \cdot [f(x+h) - f(x)]$$

και για $h \neq 0$,
$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{c \cdot [f(x+h) - f(x)]}{h} = c \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Επομένως:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[c \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] = c \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = c \cdot f'(x).$$

A2. Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία x_1, x_2 που ανήκουν στο Δ , με $x_1 < x_2$, ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα Δ , όταν για οποιαδήποτε σημεία x_1, x_2 που ανήκουν στο Δ , με $x_1 < x_2$, ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.

A3.

1. Λάθος.
2. Λάθος.
3. Σωστό.
4. Σωστό.
5. Λάθος.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2017
Α ΦΑΣΗ

E_3.ΜΕΛ3Γ(α)

ΘΕΜΑ Β

B1. $f'(x) = (x^2 \cdot \sin x)' - \left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)' = (x^2)' \cdot \sin x + x^2 \cdot (\sin x)' - \left[\frac{(\eta\mu x)' \cdot x - \eta\mu x \cdot (x)'}{x^2}\right] =$
 $= 2x \cdot \sin x + x^2 \cdot (-\eta\mu x) - \frac{\sin x \cdot x - \eta\mu x \cdot 1}{x^2} = 2x \cdot \sin x - x^2 \cdot \eta\mu x - \frac{x \cdot \sin x - \eta\mu x}{x^2}$

B2. $f'(x) = (\eta\mu^2 x)' + \left(\sqrt{\frac{1}{2}x^2 + x}\right)' - [\sin(3x - \sqrt{2})]' =$
 $= 2 \cdot \eta\mu x \cdot (\eta\mu x)' + \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}x^2 + x}} \cdot \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)' - [-\eta\mu(3x - \sqrt{2})] \cdot (3x - \sqrt{2})' =$
 $= 2 \cdot \eta\mu x \cdot \sin x + \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}x^2 + x}} \cdot (x+1) + \eta\mu(3x - \sqrt{2}) \cdot 3$

B3. $f'(x) = (2x^3)' - (\alpha x^2)' + (4x)' - \left(\frac{2}{3}\right)' = 6x^2 - 2\alpha x + 4$

Η γραφική παράσταση της f' τέμνει τον άξονα $x'x$ στο $x = -2$. Άρα $f'(-2) = 0$.

$f'(-2) = 0 \Leftrightarrow 6 \cdot (-2)^2 - 2\alpha \cdot (-2) + 4 = 0 \Leftrightarrow 24 + 4\alpha + 4 = 0 \Leftrightarrow 4\alpha = -28 \Leftrightarrow \alpha = -7$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Θα πρέπει $x^2 + 4 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq -4$ που ισχύει πάντα.

Επίσης, θα πρέπει $x^4 + x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 + 1) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \\ x^2 + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq -1, \text{ ισχύει} \end{cases}$

Άρα $A_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

Γ2. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{x^2 + 4}}{x^4 + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2 - \sqrt{x^2 + 4})(2 + \sqrt{x^2 + 4})}{x^2(x^2 + 1)(2 + \sqrt{x^2 + 4})} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^2 - (\sqrt{x^2 + 4})^2}{x^2(x^2 + 1)(2 + \sqrt{x^2 + 4})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 - x^2 - 4}{x^2(x^2 + 1)(2 + \sqrt{x^2 + 4})} =$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2017
Α ΦΑΣΗ

E_3.ΜΕΛ3Γ(α)

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{x^2(x^2+1)(2+\sqrt{x^2+4})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{(x^2+1)(2+\sqrt{x^2+4})} =$$

$$= \frac{-1}{(0^2+1)(2+\sqrt{0^2+4})} = -\frac{1}{4}$$

Γ3. Αφού η f είναι συνεχής στο $x = 0$, θα ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \quad (I)$$

$$f(0) = \frac{\kappa^3}{2} + \frac{\text{συν}(0^2+0)}{4} - \eta\mu\left(\frac{0}{2}\right) = \frac{\kappa^3}{2} + \frac{\text{συν}0}{4} - \eta\mu 0 = \frac{\kappa^3}{2} + \frac{1}{4} - 0 = \frac{\kappa^3}{2} + \frac{1}{4} \quad (I) \Rightarrow$$

$$\frac{\kappa^3}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{\kappa^3}{2} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{\kappa^3}{2} = -\frac{2}{4} \Leftrightarrow \kappa^3 = -\frac{4}{4} \Leftrightarrow \kappa^3 = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \kappa = \sqrt[3]{-1} \Leftrightarrow \kappa = -1$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f'(x) = \left(-\frac{x^3}{3}\right)' + (ax^2)' - (\beta x)' - (4)' = -\frac{1}{3} \cdot 3x^2 + 2ax - \beta = -x^2 + 2ax - \beta$

Δ2. Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(3,2)$, άρα: $f(3) = 2$

$$f(3) = 2 \Leftrightarrow -\frac{3^3}{3} + \alpha \cdot 3^2 - \beta \cdot 3 - 4 = 2 \Leftrightarrow -9 + 9\alpha - 3\beta - 4 = 2 \Leftrightarrow 9\alpha - 3\beta = 15$$

Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο σημείο με τετμημένη $x = 2$ είναι ίσος με 4, άρα: $\lambda = f'(2) = 4$.

$$f'(2) = 4 \Leftrightarrow -2^2 + 2\alpha \cdot 2 - \beta = 4 \Leftrightarrow -4 + 4\alpha - \beta = 4 \Leftrightarrow 4\alpha - \beta = 8$$

$$\text{Άρα: } \begin{cases} 9\alpha - 3\beta = 15 \\ 4\alpha - \beta = 8 \end{cases} \quad \begin{matrix} -9\alpha - 3\beta = 15 \\ \hline x(-3) \quad -12\alpha + 3\beta = -24 \end{matrix}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη, έχουμε:

$$9\alpha - 12\alpha = 15 - 24 \Leftrightarrow -3\alpha = -9 \Leftrightarrow \alpha = 3.$$

$$4\alpha - \beta = 8 \Leftrightarrow 4 \cdot 3 - \beta = 8 \Leftrightarrow -\beta = 8 - 12 \Leftrightarrow \beta = 4.$$

Δ3. Η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο $x = 3$ θα έχει τη μορφή:
 $y = \lambda x + \beta$

$$\lambda = f'(3) = -3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 3 - 4 = -9 + 18 - 4 \Leftrightarrow \lambda = -5$$

$$y = f(3) = 2, \text{ επομένως: } y = 2 \Leftrightarrow 2 = -5 \cdot 3 + \beta \Leftrightarrow 2 + 15 = \beta \Leftrightarrow \beta = 17$$

$$\text{Εξίσωση της εφαπτομένης: } y = -5x + 17$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2017
Α ΦΑΣΗ

E_3.ΜΕΛ3Γ(α)

Δ4 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f'(x) - 5}{x^3 - 5x^2 + 3x + 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-x^2 + 6x - 9}{x^3 - 5x^2 + 3x + 9} = \frac{0}{0}$ (Απροσδιόριστη Μορφή)

Παραγοντοποίηση Αριθμητή: $-x^2 + 10x - 9 = -(x - 3)(x - 3) = -(x - 3)^2$, αφού η εξίσωση $-x^2 + 10x - 9 = 0$ έχει διπλή ρίζα την $x = 3$.

Παραγοντοποίηση Παρονομαστή: Εφαρμόζοντας σχήμα Χόρνερ:

1	-5	3	9	3
	3	-6	9	
1	2	-3	0	

$x^3 - 5x^2 + 3x + 9 = (x - 3)(1 \cdot x^2 - 2 \cdot x - 3) = (x - 3)(x^2 - 2x - 3)$.

Το τριώνυμο που προκύπτει παραγοντοποιείται: $x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$, αφού η εξίσωση $x^2 - 2x - 3 = 0$ έχει ρίζες τις $x_1 = 3$ και $x_2 = -1$

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f'(x) - 5}{x^3 - 5x^2 + 3x + 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-(x - 3)^2}{(x - 3)(x - 3)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-1}{x + 1} = -\frac{1}{3 + 1} = -\frac{1}{4}$